This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Digitized by Google

Math. 364

Math. 364

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

APOLLONII PERGAEI

LOCORUM PLANORUM

LIBRI II.

RESTITUTI

A

ROBERTO SIMSON M.D.

MATHESEOS IN ACADEMIA GLASGUENSI PROFESSORE.

GLASGUAE,

IN AEDIBUS ACADEMICIS,

EXCUDEBANT ROB. ET AND. FOULIS ACADEMIAE TYPOGRAPHI.

A. D. MDCCXLIX.

Digitized by Google

Digitized by Google

NOBILISSIMO ET HONORATISSIMO DOMINO,

D. JOANNI

COMITI DE BUTE,

VICECOMITI DE KINGARTH,

DOMINO

MOUNT-STEUART, CUMBRAY ET INCHMARNOCK;

ANTIQUISSIMI ET NOBILISSIMI

ORDINIS STI ANDREAE EQUITI;

ELEGANTIORUM ARTIUM ET SCIENTIARUM

FAUTORI ET CULTORI EGREGIO;

L. M. Q. D. D.

ROBERTUS SIMSON.

Digitized by Google

Digitized by Google

PRAEFATIO.

GEOMETRAS veteres, libros non pauciores triginta tribus analyſi inſervientes, ſcripſiſſe, auctor eſt Pappus Alexandrinus, qui ſolus illorum nomina, et Propoſitiones quas continebant, magno Geometriae emolumento, ſervavit. idemque iis qui facultatem inveſtigandi Problemata acquirere velint libros hoſce unice utiles eſſe affirmat. Et Recentiores poſtquam Veterum in Theorematum et Problematum demonſtrationibus et conſtructionibus perſpicuitatem et elegantiam cognoverant, recte quidem concluſerunt artem analyticam magnopere ab iis excultam et promotam fuiſſe; Veteres autem artem hanc ſedulo occuluiſſe, *Recentiorum multi* ineptè omnino aſſeruerunt. Etenim Franciſcus Schootenius, in tractatu ſuo de concinnandis demonſtrationibus Amſtelaedami an. 1661 impreſſo, de Geometris veteribus ita ſcribit: “ Qui (veteres ſc.) id unice ſtuduiſſe videntur, quo ſua inventa, eorum- “ que demonſtrationes, poſteris majori admirationi forent, ut modum, “ quo ea ipſa invenerint ac demonſtrationibus muniverint, prorſus ſup- “ primerent et abſconderent.” Et, magis explicite, Petrus Schootenius Franciſci frater, in praefatione ad eundem librum, Franciſci in hac re ſententiam ſic exponit, “ Neque (Franciſcus ſc.) dubitabat quin plera- “ raque omnia, quae Veteribus tantum gloriae peperiſſent, Analyſe- “ os ope et beneficio reperta eſſent: ſed quae illi, ut inventorum major “ admiratio foret, diſſimulato hoc artificio et ſuppreſſo, vulgari tantum “ Syntheſeos forma exhibuiſſent. ſed cum Veterum diſſimulatione fac- “ tum videret, hunc Analyticae methodi praeſtantem uſum non mo- “ do a multis ignorari et negligi, ſed ipſam ejus certitudinem ac eviden- “ tiam a nonnullis ſuſpectam haberi, atque adeo ſoli Syntheſi miſeran-

Digitized by Google

" do labore inhaereretur: conſultum judicavit &c." En gravis veterum accuſatio, cui veteres certe nullam unquam praebuerunt anſam; ſed quae ignorantiae Recentiorum in veterum ſcriptis, tempore quo vixit Schootenius, hoc eſt poſt edita ſcripta illa, unice debetur. Schootenius enim aliique, cum certo ſcirent Analyſin veteribus cognitam fuiſſe, neque aliam ullam noſſent praeter eam quae Algebrae ope inſtituitur, quae fuit ipſorum culpa, nullumque Algebrae ante Diophantum veſtigium invenirent, inde collegerunt Veteres artem Analyticam, data opera, poſteris celaſſe. Primus hujus ſententiae auctor fuiſſe videtur Petrus Nonius, qui de Veteribus in Algebra ſua fol. 114. b, ita conqueritur, " O quam bene foret, ſi qui in ſcientiis Mathematicis ſcripſerint autho- " res, ſcripta reliquiſſent inventa ſua eadem methodo, et per eoſdem " diſcurſus, quibus ipſi in ea primum inciderunt; et non ut in Mecha- " nica loquitur Ariſtoteles, de Artificibus, qui nobis foris oſtendunt ſuas " quas fecerint Machinas, ſed artificium abſcondunt, ut magis appare- " ant admirabiles. Eſt utique inventio, in arte qualibet, diverſa mul- " tum a traditione; neque putandum eſt, plurimas Euclidis et Archi- " medis propoſitiones, fuiſſe ab illis ea via inventas qua nobis illi ipſas " tradiderunt." Et huic opinioni ſubſcribit Doctiſſ. Walliſius initio cap. 2. ſuae Algebrae, qui ibidem hunc locum Nonii ex Hiſpanica lingua in praecedentem verſionem Latinam tranſtulit. Et in eandem ſententiam Schootenius, ut jam oſtenſum, et Recentiores fere omnes eunt. Excuſandus quidem eſt Petrus Nonius, quem Pappi Alexandrini Collectiones Mathematicas nunquam vidiſſe veriſimile eſt. Nonii enim Algebra Antverpiae impreſſa fuit anno 1567, Pappi autem Collectiones non ante annum 1588 editae fuerunt. Walliſius [a] vero et Schootenius [b] viderunt Pappi Praefationem ad Lib. 7. Collectionum, in qua praedicti libri Veterum Analytici enumerantur, ex quorum argu-

[a] Vid. pag. 3. Algebrae, Vol. 2. Op. [b] Vid. ejus in locos planos Apollonii praefationem.

mentis

mentis, in eadem Praefatione plene recenſitis, clariſſime liquet, tantum abfuiſſe ut Veteres artem Analyticam ſupprimerent et abſconderent, ut eam non ſolum multo ſtudio excoluerint, ſed de ea tot libros conſcribendo, promulgaverint. Quos quidem libros Geometrae verſabant ſexcentos et plures annos, a tempore ſc. Apollonii Pergaei uſque ad Pappum Alexandrinum. Adeo igitur abſurda eſt haec Veterum accuſatio, ut ſoli Recentiorum incuriae debeatur, et minime vera habenda ſit.

Exiſtimat Clariſſimus Halleius,[c] cui multum debet vera Geometria, Pappum praedictos triginta tres libros ſub titulo τόπȣ ἀναλυομενȣ collegiſſe, ut exempla daret analyſeos inſtitutionis efficaciſſima, et diſcentium captui longe accommodatiora. Ex iis autem quae in libris hiſce continebantur, liquido conſtat eos conſcriptos fuiſſe, ut artis Analyticae ſtudioſi, inſtrumenta et auxilia Problematum reſolutioni maxime neceſſaria, ſibi parata haberent. Huic autem uſui diverſo modo inſerviebant hi libri. *Datorum enim liber* Propoſitiones continet quarum perpetuus et neceſſarius eſt uſus in Problematibus cujuſcunque generis ſolvendis. Libri de Locis planis, ſolidis, et Locis ad ſuperficiem, ut et Poriſmatum libri, multorum Problematum reſolutioni inſerviunt. Si enim, ex. gr. ex una hypotheſi ſive conditione Problematis, demonſtratum fuerit punctum in Problemate quaeſitum tangere Locum quendam poſitione datum, et ex alia conditione oſtenſum fuerit idem punctum tangere alium Locum poſitione datum; deſcribendo hos Locos, punctum quaeſitum in eorum interſectione neceſſario invenietur, et Problema ſolutum erit. Libri de ſectione Rationis, Spatii, ſectione Determinata, de Tactionibus et Inclinationibus, generalia admodum continent Problemata, ad quae ſolutiones aliorum Problematum ſaepiſſime deducuntur. quotieſcunque autem hoc evenit, Problema ſolutum habetur, citando eum Librum et Propoſitionem ad quam deductum fuerit; cujus exempla apud Pappum

c Vid. Praefationem ejus ad libros Apollonii de ſectione rationis, prope finem.

extant.

Digitized by Google

extant. Unde et in omnibus hiſce libris Analyticis, omnes caſus, omneſque Problematum in iis ſolutorum determinationes, plene enumerabantur et ſoluta erant, ut quotieſcunque ad aliquod eorum Problema aliquod deductum fuerat, ilico pateret ſolutio caſus ad quem deductum eſt, ejuſque determinatio, ſi qua fuerit.

Inter hos Veterum de analyſi Geometrica libros, duo Apollonii Pergaei de Locis planis, in ſolutione Problematum frequentioris et praecipui ſunt uſus. Eos acutiſſimus Fermatius ante annum 1629 reſtituerat, ut ex epiſtola ejus in pag. 153 operum patet. Non autem ante annum 1670 impreſſi fuerunt inter Fermatii opera varia. Eoſdem etiam reſtituit Schootenius, anno 1657 inter Exercitationes ſuas Mathematicas, impreſſos. Uterque vero Caſus et Determinationes Locorum negligit, ſine quibus parum ſunt utiles; ſolamque Locorum ſyntheſin ſine analyſi tradunt, duobus aut tribus Locis exceptis, in quibus Schootenius calculum arithmeticum adhibet.

Operae igitur pretium videbatur libros hoſce plenius et magis Apollonii inſtituto conſentaneos exhibere: neque Lemmatum quae in Locos hos ſcripſit Pappus Alexandrinus, aut quae, ab Apollonio ſcripta, ſervavit, uſum et explicationem Geometris ingrata fore putabam. Eorum enim maxima et praecipua pars a Fermatio, Schootenio, aliiſque intacta eſt; neque quibus Locis, aut cui omnino uſui inſerviunt, a tempore quo primum editae fuerunt Pappi Collectiones, ad hoc uſque tempus cognitum fuit. Ope autem quorundam horum, ſolutio quam dederat ipſe Apollonius Loci qui habetur in Prop. 5. Lib. 2. quem unam ex pulcherrimis in Geometria Propoſitionibus praedicat Fermatius, reſtituta eſt; quae quidem elegantia haud parum praeſtat ſolutioni quam dedit Fermatius. ea autem Schootenii purus eſt calculus arithmeticus.

Nonnulli forſitan qui ei quae calculo algebraico peragitur, magis quam analyſi Geometricae aſſueti ſunt, exiſtimabunt libros de Locis planis

Digitized by Google

planis et ſolidis parum utiles habendos eſſe, utpote nullas Propoſitiones continentes quae non ad paucos Canones generales deduci poſſint, quales exhibuere Carteſius, Joannes de Wit, quoſque magis generales reddidit Joannes Craig, et ex eo Marchio de L. Hoſpital. Verum hi Canones nullius ſunt uſus in Locorum inveſtigatione, ſed huic tantum utiles ut Locus qui in aequatione aliqua, jam inventa, continetur, ope alicujus horum Canonum conſtruatur. Quin et vel huic rei parum idonei ſunt hi Canones, ſi ſc. Locus conſtruendus vel multo ſimplicior, vel multo magis compoſitus fuerit eo qui habetur in Canone cujus ope conſtruendus eſt. tunc enim non niſi per ambages, et vias minimè naturales conſtructio fiet. Praeterea, ex rite inſtituta Problematis, vel Loci alicujus, analyſi Geometrica, compoſitio haud difficulter, plerumque ſponte, fluit. Contra autem, poſtquam Locus ad aequationem deductus eſt, plus negotii et ingenii ad ejus compoſitionem, ope Canonis *generalis, perficiendam,* quam ad aequationis inventionem ſaepe requiritur. Et hoc quidem multis exemplis ex Marchione de L'Hoſpital aliiſque ſcriptoribus oſtendi facile poſſet; quorum unum adducere ſatis erit. Canones $y=c+\frac{bx}{a}$, $y=c-\frac{bx}{a}$ duo ſunt ex iis quos tradunt auctores pro conſtructione Locorum ad rectam lineam. Videamus igitur quomodo his utantur in conſtructione Loci alicujus, ex. gr. ejus qui habetur in Prop. XI. Lib. I. de Locis planis Apollonii a Schootenio reſtitutis, qui Locus ut a Schootenio reſolvitur *, ad ſequentem aequationem deducitur, viz. $y=cdio+efko+ghlo+abnx+cdox-efox-ghox$ diviſa per $mzz+bnz-doz-foz+hoz$. tum jubet Schootenius, brevitatis cauſa, p ſcribi pro $cdio+efko+ghlo$ diviſis per $mzz+bnz-doz-foz+hoz$, et $\frac{q}{r}$ loco ipſorum $abn+cdo-efo-gho$ per $mzz+bnz-doz-foz+hoz$ diviſorum: quibus ſubſtitutis habebitur $y=p\pm\frac{q}{r}x$. et quoniam aequatio haec, datis p, q et r facile conſtrui poteſt, putat ſe ſatisfeciſſe aequationis pro-

* In Exercit. Mathem. p. 210.

poſitae conſtructioni; aliud enim nihil, praeter haec quae dicta ſunt, pro Compoſitione, hoc eſt conſtructione et demonſtratione Loci propoſiti affert Schootenius. atque ſic qui viam hanc ſequuntur, puerilibus hiſce operationibus, ſibi et in Geometria Tyronibus illudunt. Sed praeterquam quod aequatio haec, eique ſimiles ἀγεωμετρικα prorſus ſunt, quis non videt multo difficilius fore invenire ipſas p, q, r geometricè, ut earum ope aequatio conſtruatur, quam aequationem ipſam invenire; Canonem autem $y = p \pm \frac{q}{r} x$ nihil ad eas inveniendas conducere? idemque cenſendum eſt de Canonibus quos tradunt Locorum ad circulum et Locorum ſolidorum conſtructioni inſervientibus. Qui vero tantum hiſce calculis algebraicis aſſueti ſunt, nunquam, niſi fortuito, vel Theorematum demonſtrationes, vel Problematum et Locorum ſolutiones naturales et elegantes exhibere valebunt. Et quidem plus auxilii tum ad Analyſin tum ad compoſitionem Geometricam, ex Propoſitionibus quae in praedictis Veterum libris Analyticis continebantur, quam ex omnibus Algebrae praeceptis, jure exſpectandum eſt.

Quae ſequuntur Graeca ex Praefatione Pappi Alexandrini ad Lib. 7. Collect. Mathem. quam Apollonii duobus de ſectione Rationis libris praefixit Clariſſ. Halleius, cum duobus MSS. in Bibliotheca Regia Pariſienſi accurate contulit Dominus Jacobus Moor, tum in Matheſi, tum in literis Graecis, quas in hac Academia profitetur, multum et feliciter verſatus. Ope vero horum quaedam in melius mutata ſunt, quae ad imam paginam notantur. Alter Codex eſt is qui numeratur 2368, reliquus 2440.

TO-

ΤΟΠΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ β'.

Τῶν τόπων καθόλου οἱ μὲν εἰσὶν ἐφεκτικοὶ, οὓς καὶ Ἀπολλώνιος πρὸ τῶν ἰδίων[a] στοιχείων λέγει σημείου μὲν τόπον σημεῖον, γραμμῆς δὲ τόπον γραμμὴν, ἐπιφανείας δὲ ἐπιφάνειαν, στερεοῦ δὲ στερεόν· οἱ δὲ διεξοδικοὶ, ὡς σημείου μὲν γραμμὴν, γραμμῆς ἐπιφάνειαν, ἐπιφανείας δὲ στερεόν. οἱ δὲ ἀναστροφικοὶ, ὡς σημείου μὲν ἐπιφάνειαν, γραμμῆς δὲ στερεόν. τῶν δὲ ἐν τῷ ἀναλυομένῳ, οἱ μὲν τῶν θέσει δεδομένων ἐφεκτικοί εἰσιν· οἱ δὲ ἐπίπεδοι λεγόμενοι, καὶ οἱ στερεοὶ καὶ γραμμικοὶ διεξοδικοί εἰσι σημείων. οἱ δὲ πρὸς ἐπιφανείας ἀναστροφικοὶ μὲν εἰσὶ σημείων, διεξοδικοὶ δὲ γραμμῶν. οἱ μέντοι γραμμικοὶ ἀπὸ τῶν πρὸς ἐπιφάνειαν δείκνυνται. λέγονται δὲ ἐπίπεδοι μὲν τόποι οὗτοί τε περὶ ὧν ἐπάγομεν, καθόλου ὅσοι εἰσὶν εὐθεῖαι γραμμαὶ ἢ κύκλοι· στερεοὶ δὲ, ὅσοι εἰσὶ κώνων τομαὶ, παραβολαὶ ἢ ἐλλείψεις, ἢ ὑπερβολαί. γραμμικοὶ δὲ τόποι λέγονται ὅσαι γραμμαί εἰσιν οὔτε εὐθεῖαι, οὔτε κύκλοι, οὔτε τὶς τῶν εἰρημένων κωνικῶν τομῶν. οἱ δὲ ὑπὸ Ἐρατοσθένους ἐπιγραφέντες τόποι πρὸς μεσότητας, ἐκ τῶν προειρημένων εἰσὶ τῷ γένει· ἀπὸ δὲ τῆς ἰδιότητος τῶν ὑποθέσεων* ἐκείνοις. οἱ μὲν οὖν ἀρχαῖοι τῶν ἐπιπέδων τόπων τούτων τάξιν ἀποβλέποντες ἐστοιχείωσαν· ἧς ἀμελήσαντες οἱ μετ' αὐτοὺς προσέθηκαν ἑτέρους, ὡς οὐκ ἀπείρων τὸ πλῆθος ὄντων, εἰ θέλοι τις προσγράφειν οὐ τῆς τάξεως ἐκείνης ἐχόμενα. θήσω οὖν τὰ μὲν προκείμενα ὕστερα, τὰ δὲ[b] τῆς τάξεως πρότερα, μιᾷ περιλαβὼν προτάσει ταύτῃ. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι, ἀχθῶσιν[c] ἤτοι ἀπὸ ἑνὸς δεδομένου σημείου ἢ ἀπὸ δύο, καὶ ἤτοι ἐπ' εὐθείας ἢ παράλληλοι, ἢ δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, καὶ ἤτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας, ἢ χωρίον περιέχουσαι δεδομένον· ἅπτηται δὲ τὸ τῆς μιᾶς πέρας ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου, ἅψεται καὶ τὸ τῆς ἑτέρας πέρας ἐπιπέδου τόπου θέσει δεδομένου, ὅτε μὲν τοῦ ὁμογενοῦς, ὅτε δὲ τοῦ ἑτέρου· καὶ ὅτε μὲν ὁμοίως κειμένου πρὸς τὴν

[a] Graeco textui Halleii additum eſt verbum ἰδίων ex praedictis MSS. Bibliothecae Regiae Pariſienſis. [b] praedicti MSS. habent ἐκ τῆς [illegible]ξεως. [c] MSS. praedicti recte omnino habent verbum ἀχθῶσιν quod deeſt in impreſſis Halleii.

εὐ-

Digitized by Google

εὐθεῖαν, ὅτε δὲ ἐναντίως· ταῦτα δὲ γίνεται παρὰ τὰς διαφορὰς τῶν ὑποκειμένων· τὰ δὲ προσκείμενα ἐν ἀρχῇ ὑπὸ Χαρμάνδρου γ' συμφωνεῖ [d] ταῦτα. Ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης τὸ ἓν πέρας ᾖ δεδομένον, τὸ ἕτερον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης. Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι δεδομένην περιέχουσαι γωνίαν, τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας κοίλης. Ἐὰν τριγώνου χωρίου μεγέθει δεδομένου ἡ βάσις θέσει ϗ μεγέθει δεδομένη ᾖ, ἡ κορυφὴ αὐτοῦ ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. ἕτερα δὲ τοιαῦτα. Ἐὰν εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένης, ϗ παρά τινα θέσει δεδομένην εὐθεῖαν ἠγμένης, τὸ ἓν πέρας ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ἅψεται ϗ τὸ ἕτερον εὐθείας δεδομένης. Ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας δύο εὐθείας, παραλλήλας ἢ συμπιπτούσας, καταχθῶσιν ἐν δεδομέναις γωνίαις ἤτοι λόγον ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας δεδομένον· ἢ ὧν ἡ μία, μεθ' ἧς πρὸς ἣν ἡ ἑτέρα λόγον ἔχει δοθέντα, δεδομένη ἐστί· ἅψεται τὸ σημεῖον θέσει δεδομένης εὐθείας. Καὶ ἐὰν ὦσιν ὁποσαιοῦν εὐθεῖαι θέσει δεδομέναι, ϗ ἐπ' αὐτὰς ἀπό τινος σημείου καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ δοθείσης ϗ κατηγμένης, μετὰ τοῦ ὑπὸ δοθείσης ϗ ἑτέρας κατηγμένης, ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης ϗ ἑτέρας κατηγμένης, ϗ τῶν λοιπῶν ὁμοίως, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ θέσει δεδομένας παραλλήλους καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐν δεδομέναις γωνίαις, ἤτοι [e] ἀποτέμνουσαι πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις εὐθείας, λόγον ἐχούσας δοθέντα, ἢ χωρίον περιεχούσαι δεδομένον, ἢ ὥστε τὰ ἐπ' αὐτῶν τῶν κατηγμένων δεδομένα εἴδη, ἢ τὴν ὑπεροχὴν τῶν εἰδῶν ἴσην εἶναι δεδομένῳ χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας.

Τὸ δὲ δεύτερον βιβλίον περιέχει τάδε. Ἐὰν ἀπὸ δύο δεδομένων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, ϗ ᾖ τὰ ἀπ' αὐτῶν δοθέντι χωρίῳ διαφέροντα, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Ἐὰν δὲ ὦσιν ἐν λόγῳ δοθέντι, ἤτοι εὐθείας

d ex praedictis MSS. poſitum eſt συμφωνεῖ vice συμφρονεῖ in impreſſis. e Ita neceſſitate coacti mutavimus, in impreſſis enim Halleii, ut et in MSS. praedictis, legitur ἀποτέμνουσαι πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις εὐθείας, ἤτοι λόγον ἐχούσας δοθέντα ἢ χωρίον περιεχούσας, quae ſi manerent, Locus horum ſecundus non eſſet Locus planus, ſed ſolidus ad Hyperbolam.

ἢ

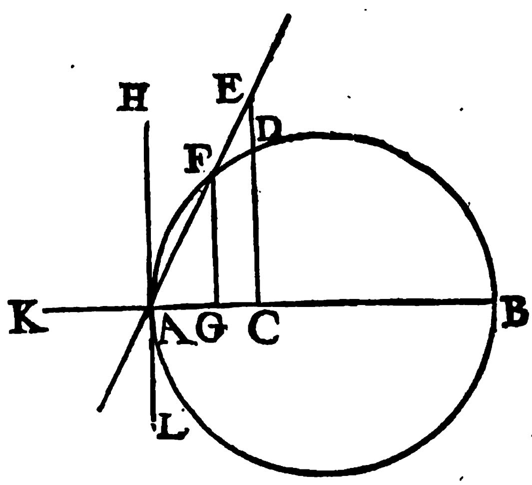
ἢ περιφερείας. Ἐὰν ᾖ θέσει δεδομένη εὐθεῖα, καὶ ἐπ' αὐτῆς δοθὲν σημεῖον, καὶ ἀπὸ τούτου διαχθεῖσά τις πεπερασμένη, ἀπὸ δὲ τοῦ πέρατος ἀχθῇ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὴν θέσει δεδομένην, καὶ ᾖ τὸ ἀπὸ τῆς διαχθείσης ἴσον τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ ἧς ἀπολαμβάνει, ἤτοι πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ, ἢ πρὸς ἑτέρῳ δοθέντι σημείῳ· ἐπὶ τῆς θέσει δεδομένης, τὸ πέρας τῆσδε ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων εὐθεῖαι κλασθῶσιν, καὶ ᾖ τὸ ἀπὸ τῆς μιᾶς τοῦ ἀπὸ τῆς ἑτέρας δοθέντι μεῖζον ἢ ἐν λόγῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας· Ἐὰν ἀπὸ ὁσωνοῦν δεδομένων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ἑνὶ σημείῳ, καὶ ᾖ τὰ ἀπὸ πασῶν εἴδη ἴσα δοθέντι χωρίῳ, τὸ σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου παρὰ τὴν θέσει ἀχθεῖσα εὐθεῖα ἀπολαμβανομένη ἀπὸ θέσει δεδομένης εὐθείας πρὸς δοθέντι σημείῳ· καὶ ᾖ τὰ ἀπὸ τῶν κεκλασμένων εἴδη ἴσα τῷ ὑπὸ δοθείσης καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης, τὸ πρὸς τῇ κλάσει σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας. Ἐὰν ἐντὸς κύκλου θέσει δεδομένου δοθέν τι σημεῖον ᾖ, καὶ δι' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα, καὶ ἐπ' αὐτῆς ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός· καὶ ᾖ τὸ ἀπὸ τῆς ἄχρι τοῦ δοθέντος ἐντὸς σημείου, ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης, ἢ τὸ μόνον, ἢ τοῦτο τε καὶ τὸ [f] ὑπὸ τῶν ἐντὸς δύο τμημάτων, τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἅψεται θέσει δεδομένης εὐθείας. Καὶ ἐὰν τοῦτο μὲν σημεῖον ἅπτηται θέσει δεδομένης εὐθείας, ὁ δὲ κύκλος μὴ ὑπόκειται, τὰ ἐφ' ἑκατέρα τοῦ δεδομένου σημεῖα ἅψεται θέσει δεδομένης περιφερείας τῆς αὐτῆς. ἔχει δὲ τὰ τόπων ἐπιπέδων δύο βιβλία θεωρήματα ἤτοι διαγράμματα ρμζ', λήμματα δὲ ὀκτώ.

[f] Ratio hujus mutationis reddita eſt in pagg. 194, 195. In impreſſis enim et MSS. legitur τῷ μόνῳ, ἢ τούτῳ τι καὶ τῷ.

LOCORUM PLANORUM Lib. II.

Locorum in genere alii ſunt ἐφεκτικοὶ, " quaſi adhaerentes eodem " ſc. loco," quo ſenſu et Apollonius ante propria elementa dicit puncti ſc. Locum punctum eſſe, et lineae Locum lineam, et ſuperficiei ſuperficiem, ſolidique ſolidum; alii vero διεξοδικοὶ, " pertranſeuntes ſc. per " totam lineam, vel ſuperficiem, vel per totum ſolidum;" ut ſc. puncti Locus ſit linea, lineae ſuperficies, ſuperficiei vero ſolidum; alii denique ἀναστροφικοὶ, revolventes, ut ſc. puncti Locus ſit ſuperficies, lineae vero ſolidum. Locorum vero quae in Analyticis ſc. libris habentur, alii, poſitione ſc. datorum ἐφεκτικοὶ ſunt, alii, qui Plani vocantur, ut et ſolidi et lineares, loci ſunt διεξοδικοὶ punctorum; qui vero Loci ad ſuperficiem vocantur ἀναστροφικοὶ ſunt punctorum, διεξοδικοὶ vero linearum. Lineares vero ex Locis ad ſuperficiem demonſtrantur. * Vocantur autem Loci Plani, de quibus hic agitur, in genere quotcunque ſunt

* Ut haec a Tyronibus melius intelligantur, non inutile erit exempla duo ſequentia exhibere Locorum planorum maxime ſimplicium: Loci enim ſolidi caeterique ad praeſens inſtitutum non ſpectant. Sit igitur recta linea AB poſitione data, datumque in ipſa punctum A; et ducta quavis CD ad rectos angulos ipſi AB, intra angulum rectum HAB, vel eum KAL qui ipſi eſt ad verticem, quae abſcindat ſegmentum CA puncto A adjacens; manifeſtum eſt poſſe in recta CD inveniri punctum E, quod faciat EC ad CA in data quavis ratione, puta ut EC ſit dupla ipſius CA. Innumerae autem rectae poſſunt duci ad rectos angulos ipſi AB, et in unaquaque ipſarum erit punctum idem praeſtans quod punctum E, hoc eſt cujus diſtantia a recta AB dupla erit ſegmenti quod abſcindit recta ducta inter ipſam et punctum A. Patet etiam ſi jungatur AE et producatur ad utraſque partes, punctum quodvis in ipſa, ut punctum F, idem facere quod punctum E, hoc eſt, ſi ducatur FG perpendicularis



Digitized by Google

ſunt rectae lineae vel circulares. Solidi vero quotcunque ſunt Coni ſectiones, Parabolae ſc. aut Ellipſes, aut Hyperbolae. Lineares denique Loci vocantur quotcunque lineae neque rectae ſunt, neque circulares, neque quaepiam dictarum Sectionum Conicarum. Quae vero ab Eratoſthene Loci ad Medietates dicuntur, ejuſdem ſunt generis cum praedictis, ſpecie autem, a propria hypotheſium natura *ab* illis *diſtinguuntur*.

Veteres igitur, in Locis hiſce Planis, ordinem reſpicientes, Elementa tradiderunt, quem negligentes poſteriores alios adjecerunt, quaſi Loci multitudine infiniti non ſint, ſi velit quis adſcribere quae ex hoc ordine non pendent *. Ponam igitur ea quae adjecta ſunt poſteriora, quae vero ordinem habent priora, *quae* una hac propoſitione complectar.

Si ducantur duae rectae lineae, vel ab eodem dato puncto, vel a duobus, quae vel ſint in linea recta, vel parallelae, vel datum contineant angulum; et *ductae* vel datam inter ſe habeant rationem, vel datum *comprehendant* ſpatium: tangat autem terminus unius Locum planum poſitione datum: tanget et alterius terminus Locum planum poſitione datum, interdum quidem ejuſdem generis, interdum vero diverſi; in-

ris ad AB, fore FG duplam ipſius GA, quia eſt FG ad GA, ut EC ad CA; nullumque punctum extra rectam AE intra praedictos angulos, poſſe idem facere. Quoniam igitur omnia haec puncta ſita ſunt in recta AE, recta haec proprie vocatur Locus horum punctorum. Rurſus, ſi ad rectam AB poſitione et magnitudine datam, ducatur perpendicularis EC, liquet in hac poſſe invenire punctum D quod faciat quadratum ex DC aequale rectangulo ACB contento ſegmentis ipſius AB; et ſimiliter poterit in unaquaque recta perpendiculari ad AB, inveniri punctum quod idem praeſtabit. Si autem circulus deſcribatur ſuper diametrum AB, patet, ex natura circuli, punctum quodvis in ipſius circumferentia, ut punctum F, nullumque punctum extra aut intra circumferentiam, idem facere quod punctum D. Unde circumferentia haec recte vocatur Locus omnium illorum punctorum. Quod ſi propoſitum ſit invenire punctum quod utriſque hiſce proprietatibus gaudeat, a quo ſc. ſi ad rectam AB poſitione et magnitudine datam, ducatur perpendicularis, ſit haec dupla ſegmenti inter ipſam et punctum A, quadratum vero ex ipſa aequale ſit rectangulo contento ſegmentis inter eandem et puncta A, B; manifeſtum eſt punctum hoc, ob primam conditionem, neceſſario locari in recta AE, et, propter reliquam, idem locari in circumferentiam ſuper diametrum AB; et propterea in ipſarum interſectione F inventum iri. Atque hoc exemplo patet quo modo doctrina de Locis Problematum ſolutioni inſervit.

* Sive, nulla hujus ordinis habita ratione, ut vertit Clariſſ. Halleius.

terdum

terdum ſimiliter poſitum reſpectu rectae lineae, interdum contrario modo ſitum. haec autem fiunt propter differentias hypotheſium.

Tria autem in principio (*Locorum ſc. Apollonii*) a Charmandro adjecta ſunt hiſce conſona. *viz.*

Si rectae magnitudine datae unus terminus datus ſit, alter tanget circumferentiam concavam poſitione datam.

Si a duobus datis punctis inflectantur rectae datum continentes angulum, commune earum punctum tanget circumferentiam concavam poſitione datam.

Si trianguli ſpatii magnitudine dati baſis poſitione et magnitudine data ſit, vertex ejus tanget rectam poſitione datam.

Alia autem ſunt hujuſmodi.

Si rectae magnitudine datae, et quae parallela ducta eſt cuidam poſitione datae rectae, unus terminus tangat poſitione datam rectam, tanget et alter rectam poſitione datam.

Si a quodam puncto ad duas rectas poſitione datas, parallelas vel ſibi mutuo occurrentes, ducantur in datis angulis duae rectae, quae vel habent datam inter ſe rationem, vel quarum una, ſimul cum ea ad quam altera rationem habet datam, data eſt: tanget punctum rectam poſitione datam.

Et ſi fuerint quotcunque rectae poſitione datae, et ad ipſas a quodam puncto ducantur rectae in datis angulis; ſitque rectangulum contentum data *recta* et *una* ducta, ſimul cum rectangulo a data et alia ducta, aequale rectangulo a data et alia (*tertia*) ducta; et ſic de caeteris; tanget punctum rectam poſitione datam.

Si a quodam puncto ad poſitione datas duas parallelas ducantur rectae in datis angulis, quae vel abſcindant, ad data in ipſis puncta, rectas rationem datam habentes; vel ſpatium datum comprehendant; vel ita

Digitized by Google

ita ut datae ſuper ipſas ductas ſpecies *ſimul*, vel ſpecierum exceſſus aequalis ſit dato ſpatio; punctum *illud* tanget rectam poſitione datam *.

Secundus autem liber haec continet.

Si a duobus datis punctis inflectantur rectae, et quadrata ex ipſis dato ſpatio differant, punctum *concurſus* tanget rectam poſitione datam. Si vero *ductae* ſint in ratione data, tanget punctum *concurſus* vel rectam vel circumferentiam *poſitione datam*.

Si ſit recta poſitione data, et in ipſa datum *ſit* punctum, et ab hoc ducatur quaedam *recta* terminata, a *hujus* autem termino ducta ſit perpendicularis ad *rectam* poſitione datam; et ſit quadratum ex ducta aequale rectangulo contento data *recta*, et ea quam aufert vel ad ipſum datum punctum, vel ad aliud datum punctum in *recta* poſitione data: terminus hujus *ductae* tanget circumferentiam poſitione datam.

Si a duobus datis punctis inflectantur rectae, et ſit quadratum ex una, quadrato ex altera, dato majus, quam in ratione; tanget punctum circumferentiam poſitione datam.

Si a quotcunque datis punctis inflectantur rectae ad unum punctum, et ſint ſpecies † ex omnibus *deſcriptae* aequales ſpatio dato; tanget punctum circumferentiam poſitione datam.

† i. e. figurae ſpecie datae.

Si a duobus punctis datis inflectantur rectae, a puncto autem *concurſus* ducatur recta parallela poſitione datae, quae auferat a recta poſitione data *ſegmentum* puncto dato adjacens; ſintque ſpecies ex inflexis *ſimul* aequales rectangulo a data et abſciſſa; punctum concurſus tanget circumferentiam poſitione datam.

Si intra circulum poſitione datum, punctum aliquod datum ſit, et per ipſum ducta ſit recta quaevis, et in ea ſumatur punctum aliquod extra

* Paragrapha haec in Graecis codicibus male ſe habet; unde et Fermatius tres poſteriores ejus partes ut non ſanas et commentitias rejicit; debuit autem ſolam partem ſecundam rejeciſſe. paucis autem mutatis omnia ſano fiunt. Schootenius ſenſum Pappi recte in his explicavit.

Digitized by Google

circulum; ſit autem quadratum ex recta intercepta inter puncta illa, aequale rectangulo contento tota et extra *circulum* abſciſſa, vel ſolum *ſc. quadratum*, vel etiam hoc una cum rectangulo a duobus ſegmentis intra *circulum*: punctum extra *circulum* tanget rectam poſitione datam.

* Et ſi hoc quidem punctum tanget rectam poſitione datam, circulus autem non ponatur, puncta ad utraſque *puncti* dati partes, tangent eandem circumferentiam poſitione datam.

Habent autem Locorum planorum duo libri Theoremata ſive Diagrammata CXLVII. Lemmata vero octo.

Hae ſunt Propoſitiones quas, ut earum Caſus et Determinationes, ciſque inſervientia Lemmata, in libris ſequentibus reſtituere et demonſtrare conati ſumus ſecundum viam Analyticam et Syntheticam Geometris Veteribus familiarem. " ἐμοὶ γὰρ τὶ τῶν μὴ εὑρημένων ἐξευρίσκειν, ὅ, τι καὶ " εὑρεθὲν κρέσσον ἢ ἀνεξεύρετον, ξυνέσιος δοκέει ἐπιθύμημά τε καὶ ἔργον εἶναι. καὶ " τὸ τὰ ἡμιέργα ἐς τέλος ἐξεργάζεσθαι ὡσαύτως."

HIPPOCRATES Lib. de Arte.

* Propoſitio ultima omnino eſt mutila, non enim ex iis quae in ea data ſunt, oſtendi poterit puncta tangere circumferentiam poſitione datam; ut ſana reddatur, addendum eſt, " Et ſi rectangulum a " ſegmentis inter duo puncta et datum punctum, datum fuerit, quadratum vero ex ſegmento inter " datum punctum et datam poſitione rectam, vel ſolum, vel adjuncto praedicto rectangulo dato, ae- " quale fuerit rectangulo a ſegmentis inter rectam poſitione datam et duo puncta ſumpta."

Fermatius autem qui putat hanc ultimam, ut apud Pappum eſt, ſimili modo quo penultima oſtendi poſſe, eam non examinaſſe videtur. Non autem operae praetium viſum fuit ei inter Apollonii propoſitiones locum dare. quamvis jam emendata facile oſtendi poſſet.

APOLLO-

Digitized by Google

APOLLONII PERGAEI

LOCORUM PLANORUM

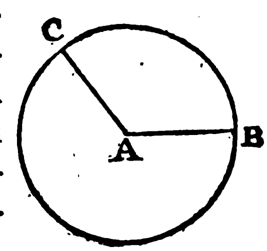
LIBER PRIMUS.

PROPOSITIO I.

Charmandri.

SI rectae lineae magnitudine datae terminus unus datus ſit, alter terminus tanget concavam circumferentiam poſitione datam.

SIT enim A B magnitudine data, datumque ſit punctum A; circulus centro A intervallo A B deſcriptus poſitione et magnitudine dabitur [Def. 6. datorum]. Et manifeſtum eſt hujus circumferentiam Locum eſſe quem tangit terminus cujuſvis rectae quae a puncto A, ipſi A B aequalis ducitur. Et contra, rectam quamcunque a centro A ad circumferentiam ductam, aequalem eſſe ipſi A B.

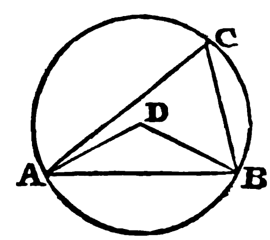


Digitized by Google

Prop. II. *Charmandri.*

Si a duobus punctis datis inflectantur rectae datum angulum continentes, commune earum punctum tanget circumferentiam concavam poſitione datam.

Data enim ſint A, B puncta, et inflectantur rectae AC, BC continentes angulum ACB aequalem dato angulo; et circa triangulum ACB deſcripto circulo, ſit ejus centrum D; et AB, AD, BD jungantur. Quoniam igitur datus eſt ACB angulus, dabitur ejuſdem duplex ſc. angulus ADB ad centrum, et data eſt ratio AD ad BD, aequales enim ſunt; quare ſpecie datum eſt triangulum ADB [41. dat.] data igitur eſt ratio AB ad AD; et data eſt AB, quare AD magnitudine data [2. dat.]; ſed et poſitione, propter AB poſitione datam punctumque A, et angulum BAD datum [29. dat.], quare punctum D datum eſt [27. dat.]. Ergo circulus centro D intervallo DA deſcriptus poſitione et magnitudine datus eſt [6. def. dat.]. Compoſitio autem eadem eſt cum conſtructione et demonſtratione 33. 3. Elem. Eucl. deſcribatur ſc. ſuper AB ſegmentum circuli capiens angulum aequalem dato angulo, erit hujus circumferentia locus quaeſitus, ut patet.



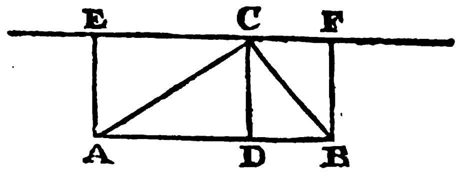
Prop. III. *Charmandri.*

Si trianguli magnitudine dati, baſis quoque poſitione et magnitudine data ſit; vertex ejus tanget rectam poſitione datam.

Sit enim recta AB poſitione et magnitudine data, et triangulum ABC magnitudine datum: tanget vertex C rectam poſitione datam.

Ad

Ad AB ducatur perpendicularis CD, et compleatur parallelogrammum ADCE. quoniam igitur magnitudine datum eſt ſpatium ACB, dabitur ipſius duplum rectangulum ſc. contentum ab ipſis AB, CD ſeu rectangulum EAB; et data eſt AB magnitudine, et angulus BAE; quare [57. dat.] magnitudine data eſt AE; ſed et poſitione [29. dat.]; Ergo punctum E datum [27. dat.], et propterea recta EC, quam tangit punctum C, poſitione data eſt [28. dat.].



Componetur ita: ad rectam AB applicetur rectangulum AEFB aequale duplo ſpatii dati, et producatur utrinque recta EF, erit haec locus quaeſitus. nam a quovis in ipſa puncto C ductis CA, CB, erit triangulum ACB aequale dimidio rectanguli EB, hoc eſt ſpatio dato.

Propoſitio generalis Pappi, qua continentur, ut ex Pappo videtur, propoſitiones libri primi de Locis planis quae ſunt ipſius Apollonii.

" *Si ducantur rectae duae, vel ab eodem dato puncto, vel a duobus; quae*
" *vel ſint in linea recta, vel parallelae, vel datum contineant angulum; et*
" ductae *vel datam inter ſe habeant rationem, vel datum comprehendant ſpa-*
" *tium; tangat autem terminus unius locum planum poſitione datum; tanget*
" *etiam alterius terminus Locum planum poſitione datum, interdum quidem e-*
" *juſdem generis, interdum vero diverſi; interdum ſimiliter poſitum reſpe-*
" *ctu rectae lineae, interdum contrario modo ſitum."*

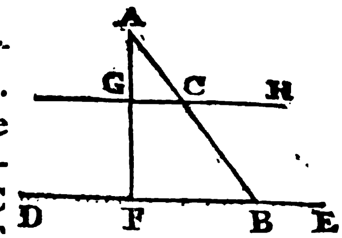
PROP. IV. *Apollonii prima.*

Si a dato puncto ducantur duae rectae in eadem recta linea, habeantque datam inter ſe rationem; terminus autem unius tangat rectam poſitione datam; tanget terminus alterius rectam poſitione datam. *Eſt 35. et 36. Datorum Euclid.*

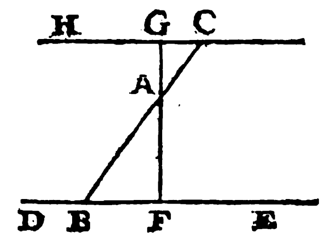
A dato

Digitized by Google

A dato puncto A in eadem recta linea ſint AB, AC datam inter ſe habentes rationem, et tangat punctum B rectam DE poſitione datam; tanget etiam C rectam poſitione datam.



Ducatur enim a puncto A ad rectam DE perpendicularis AF, quae poſitione dabitur [30. dat.], et poſitione data eſt DE [ex hyp.] quare datum eſt punctum F [25. dat.]; ergo AF poſitione et magnitudine data eſt [26. dat.]: per C ducatur CG parallela ipſi DE; erit igitur AF ad AG, ut AB ad AC quae ex hypotheſi datam inter ſe habent rationem; quare data ratio AF ad AG; et data eſt AF magnitudine, quare et AG; ſed et poſitione data AG, et punctum A; ergo datum eſt punctum G [27. dat.]; et propterea recta GC quam tangit punctum C poſitione data eſt [28. dat.].



Componetur ita: ducatur AF ad DE perpendicularis, et in ipſa ſumatur AG ad quam AF datam habet rationem, et per G ducatur GH parallela rectae DE; erit haec Locus quaeſitus: Etenim ſi ad DE ducatur quaevis AB occuratque ipſi GH in C, erit AB ad AC, ut AF ad AG, hoc eſt in data ratione.

PROP. V.

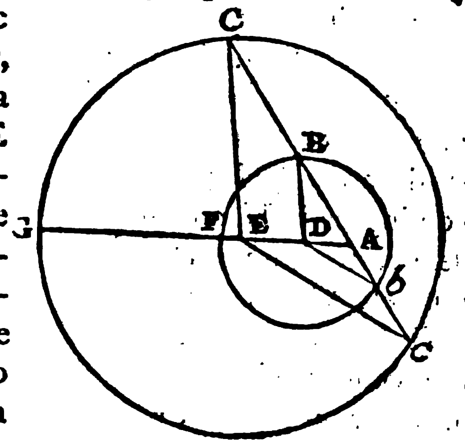
Si a dato puncto A ducantur AB, AC in eadem recta linea datamque inter ſe habentes rationem; tangat autem B terminus unius circumferentiam poſitione datam; tanget etiam C terminus alterius circumferentiam poſitione datam, ſimiliterque poſitam, hoc eſt convexam vel concavam prout illa quam B tangit convexa vel concava fuerit.

Sit enim D centrum circuli cujus circumferentiam tangit punctum B, et junctae DB parallela ducatur CE quae occurrat junctae AD in E.

Quoniam

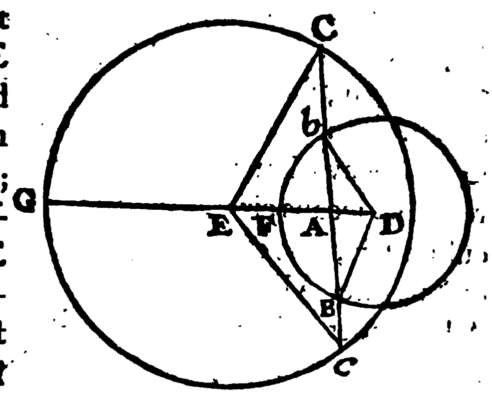
Digitized by Google

Quoniam igitur parallelae ſunt DB, EC Erit [4. 6.] tum AD ad AE, tum DB ad EC, ut AB ad AC, hoc eſt in data ratione. data autem eſt AD, poſitione et magnitudine, propter data puncta A, D; [26. dat.] quare eſt AE magnitudine data [2 dat.] ſed et poſitione, et datum eſt punctum A, quare datum punctum E [27. dat.]. et quoniam data eſt DB magnitudine, et ratio ipſius ad EC, dabitur magnitudine EC; et datum eſt punctum E; Ergo tangit punctum C circumferentiam poſitione datam per Prop. I. hujus.

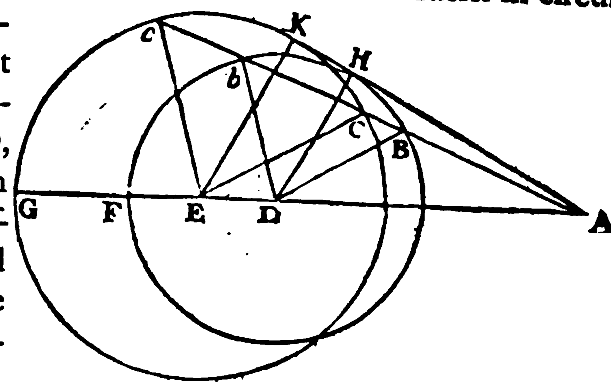


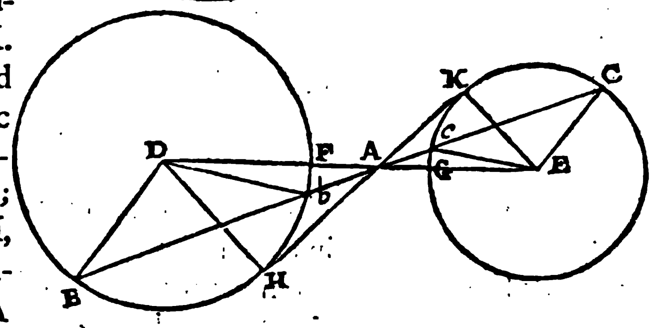
Componetur vero ita.

Juncta AD occurrat circulo cujus centrum D in F, et fiat AD ad AE in data ratione, et in eadem fiat DF ad EG; ponenda autem eſt AE verſus eaſdem vel contrarias partes ad quas eſt AD, prout AC eſt ad eaſdem vel contrarias partes ad quas eſt AB; quod quidem ex hypotheſi dignoſcendum; centro vero E intervallo EG deſcribatur circulus: Erit hujus circumferentia Locus quaeſitus, hoc eſt ſi a puncto A ducatur quaevis AB ad circumferentiam cujus centrum eſt D, occurret ducta circulo cujus centrum eſt E in puncto quodam C, et erit AB ad AC, ut AD ad AE. Jungantur enim DB, EC ſitque primò punctum A intra circulum cujus centrum eſt D, et quoniam ex conſtructione eſt AD ad AE, ut DF ad EG, et eſt AD minor ſemidiametro DF, erit AE minor ſemidiametro EG, hoc eſt erit punctum A intra circulum cujus centrum eſt E, ideoque hujus circumferentiae occurret recta quaevis AB a pun-

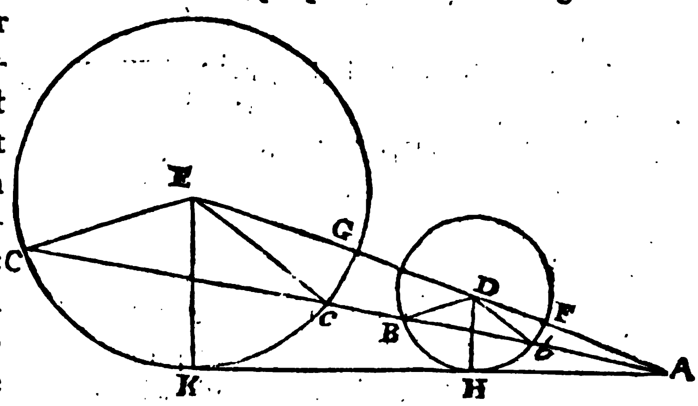


cto A ducta, eodemque modo idem oſtendetur ſi A fuerit in circumferentia circuli cujus centrum D. Secundo ſit punctum A extra circulum cujus centrum eſt D, et ducatur AH ipſum contingens in H, ad eaſdem partes ipſius AD ad quas eſt AB; et junctae DH ducatur EK parallela occurrens circulo cujus centrum eſt E in K.





Et quoniam eſt AD ad AE, ut (DF ad EG, hoc eſt) DH ad EK, et parallelae ſunt DH, EK; in recta linea ſunt A, H, K puncta *. rectus autem eſt angulus DHA [18. 3.], quare rectus eſt EKA; et propterea AK contingit circulum GK, quaevis igitur recta AB ſecans circulum FH, hoc eſt cadens inter AD et AH, cadet etiam inter AE et contingentem AK hoc eſt ſecabit circulum GK in puncto quodam C.



In utroque vero caſu quoniam D, E centra ſunt circulorum erit DB ad EC, ut (DF ad EG, hoc eſt ex conſtructione ut) AD ad AE; et in triangu-

* Patet hoc ex 26. 6 vel 32. 6.

lis

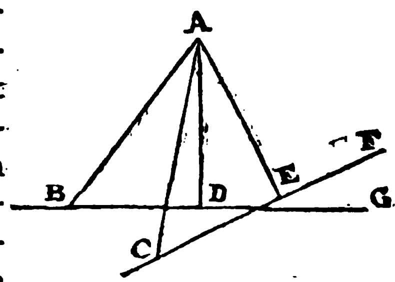
lis ADB, AEC quae communem vel aequalem habent angulum ad A, ſunt anguli ABD, ACE ſimul vel minores, vel non minores recto; (utraque enim AB, AC ducenda eſt vel ad partes convexas vel concavas circulorum) quare per 7. 6. aequalis eſt angulus ADB angulo AEC, ideoque eſt AB ad AC, ut AD ad AE, hoc eſt in ratione data.

Prop. VI.

Si a dato puncto ducantur duae rectae lineae datum continentes angulum, datamque inter ſe rationem habentes; tangat autem terminus unius rectam poſitione datam, tanget et terminus alterius rectam poſitione datam.

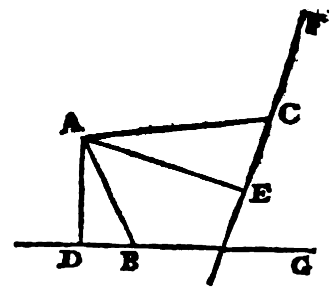
Sit datum punctum A, et ductae ſint AB, AC datum continentes angulum BAC, datamque inter ſe habentes rationem; tangat autem punctum B rectam DG poſitione datam, tanget et punctum C rectam poſitione datam.

Ducatur enim ad BG recta AD in dato quovis angulo, puta recto, ADB; et fiat angulus DAE ipſi BAC aequalis, et ſit ratio DA ad AE aequalis rationi quam habet BA ad AC; ut ſcilicet habeatur aliud punctum E in loco quaeſito; junctaque CE producatur. Quoniam igitur a dato puncto A ad rectam poſitione datam BG ducta eſt AD in angulo dato, poſitione dabitur AD [30. dat.]; quare datum eſt punctum D [25. dat.], ipſaque AD poſitione et magnitudine [26. dat.]; et data eſt ratio AD ad AE, quare [2. dat.] magnitudine data eſt AE; ſed et poſitione, propter AD poſitione datam, et punctum A, angulumque datum DAE [29. dat.]; datum igitur eſt punctum E [27. dat.]. Aequales autem ſunt anguli DAE, BAC, quare addito vel ablato communi angulo, erit DAB angulus ipſi EAC aequalis



aequalis

qualis. et quoniam eſt DA ad AE, ut BA ad AC, erit permutando DA ad BA, ut AE ad AC; et ſunt circa aequales angulos; aequiangula igitur ſunt DAB, EAC triangula, et angulus AEC propterea aequalis eſt dato angulo ADB. Quoniam igitur a dato puncto E in recta poſitione data AE ducta eſt EC in angulo dato AEC, poſitione dabitur EC [29. dat.]. Tangit proinde punctum C rectam poſitione datam.



Componetur vero ita.

Ducatur a puncto A ad rectam poſitione datam DG quaevis recta AD, et fiat angulus DAE aequalis angulo dato, et ſumatur AE ad quam AD datam habet rationem; per punctum vero E ducatur EF faciens angulum AEF aequalem angulo ADG, ita ſc. ut ſint ad eaſdem partes rectarum AE, AD: Erit recta EF Locus quaeſitus, hoc eſt ſi a puncto A ducatur ad DG quaevis recta AB, et ad EF ducatur AC faciens angulum BAC aequalem ipſi DAE; habebit AB ad AC eandem rationem quam AD ad AE. quoniam enim aequales ſunt anguli DAE, BAC, erunt et DAB, EAC aequales; et aequales ex conſtructione ſunt anguli ADB, AEC; Ergo aequiangula ſunt triangula DAB, EAC; et propterea eſt AB ad AC, ut AD ad AE, hoc eſt in ratione data.

Lemma I.

Si a puncto A ad centra duorum circulorum ducantur rectae AD, AG; habeantque ductae inter ſe eandem rationem quam habent ſemidiametri ED, FG; et ducantur rectae AK, AL contingentes circulos ad eaſdem ipſorum partes, et AM, AN eoſdem ad alteras partes contingentes: Erit uterque angulus KAL, MAN aequales angulo DAG rectis ad centra a puncto A ductis contento.

Jungantur

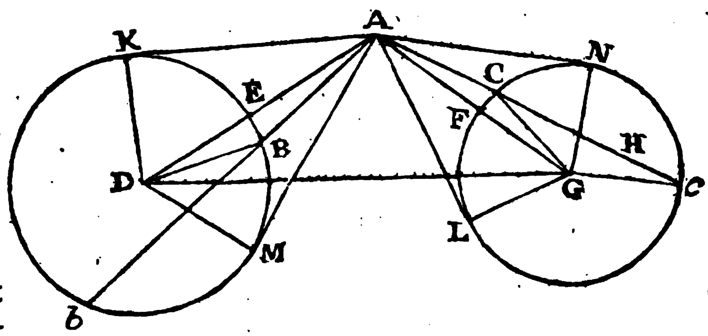
Jungantur enim (*vid. fig. ſequent.*) DK, GL; et quoniam in triangulis rectangulis [18. 3.] AKD, ALG ex hypotheſi eſt AD ad AG, ut DK ad GL, et permutando AD ad DK, ut AG ad GL; Erunt triangula haec aequiangula [7. 6.]. aequales igitur ſunt anguli DAK, GAL, additoque communi DAL,aequales erunt anguli KAL, DAG; et ſimiliter aequales oſtendentur MAN, DAG.

Prop. VII.

Si a dato puncto ducantur duae rectae lineae datum continentes angulum, datamque inter ſe habentes rationem; tangat autem terminus unius circumferentiam poſitione datam, tanget et terminus alterius circumferentiam poſitione datam.

A dato puncto A ductae ſint AB, AC datum continentes angulum BAC, datamque inter ſe rationem habentes; tangat autem punctum B circumferentiam poſitione datam circuli ſc. cujus centrum eſt D, tanget etiam punctum C circumferentiam poſitione datam.

Junctis AD, BD ducatur AF faciens angulum DAF aequalem dato angulo BAC, et ad AF ducatur CG faciens angulum ACG aequalem ipſi ABD. quoniam igitur aequales ſunt anguli DAG, BAC aequales erunt DAB, GAC; et

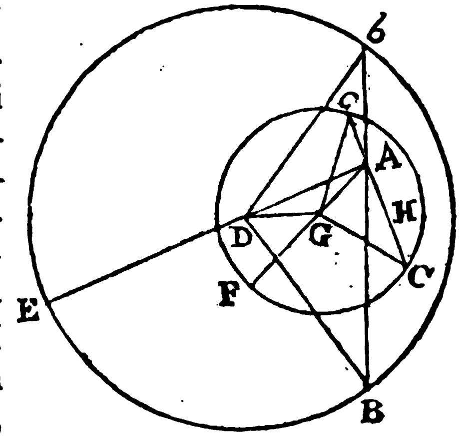


aequales ſunt ABD, ACG, quare aequiangula ſunt triangula ABD, ACG. Eſt igitur DA ad AG, ut AB ad AC; et data eſt ratio AB ad AC, quare data eſt ratio DA ad AG; data autem magnitudine eſt DA, propter data puncta A,D; quare et AG magnitudine data eſt,

ſed et poſitione [29. dat.]; datum propterea eſt punctum G. Et propter aequiangula triangula eſt BD ad CG, ut AB ad AC; data igitur eſt ratio BD ad CG; et data eſt BD magnitudine, quare et CG. Quoniam igitur a dato puncto G ducta eſt G C magnitudine data, tanget punctum C circumferentiam poſitione datam, per Prop. 1. hujus.

Componetur vero ita.

A dato puncto A ducatur AD ad centrum circuli poſitione dati, occuratque circumferentiae in E, et ducatur AF faciens angulum DAF aequalem angulo dato, ita ſc. ut ad quas partes rectae A B ducenda eſt AC, ſit AF ad eaſdem partes rectae AD; et in AF ſumatur AG ad quam AD datam habet rationem; ut vero AD ad AG, ita fiat DE ad G F, et centro G intervallo GF deſcribatur circulus: Erit hujus circumferentia Locus quaeſitus, ſc. ſi a puncto A ducatur ad circumferentiam cujus centrum eſt D recta quaevis A B, et ducatur A H faciens angulum BAH aequalem angulo DAG ita ſc. ut AB, AH ſint ad eaſdem partes rectarum AD, AG; occurret AH circumferentiae alterius circuli in puncto quodam C, et erit AB ad AC,



ut AD ad AG, dummodo ſc. ſumantur eae interſectiones B, C vel *b*, *c* quae ſunt ad eaſdem circulorum partes ratione puncti A. Quoniam enim eſt AD ad AG, ut DE ad G F, ſi punctum A fuerit intra circulum BE, vel in ipſius circumferentia, hoc eſt ſi DA minor vel aequalis fuerit ipſi DE, erit GA minor vel aequalis ipſi GF, hoc eſt punctum A erit intra circulum CF vel in ejus circumferentia, et propterea quaevis recta a puncto A ducta occurret circulo CF. Si vero punctum A fuerit extra circulum B E, ſimiliter oſtendetur ipſum eſſe extra circulum CF; et quoniam angulus BAH aequalis eſt angulo DAG, hoc eſt, per Lemma, angulo KAL contento rectis contingentibus

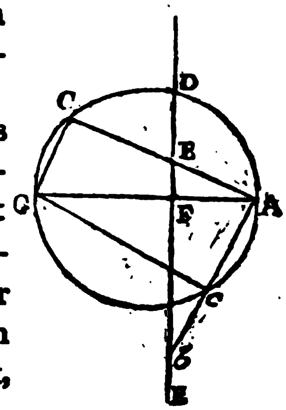
Digitized by Google

tibus circulos ad eaſdem ipſorum partes, et recta AB vel contingit circulum BE, vel inter rectas ipſum contingentes cadit, recta AH vel continget circulum CF, vel cadet inter rectas AL, AN quae ipſum contingunt; quare in omni caſu AH occurret circulo CF: occurrat ei in C, et BD, CG jungantur. Quoniam igitur aequales ſunt DAG, BAC anguli, aequales erunt DAB, GAC; et ex conſtructione eſt AD ad AG, ut DB ad GC, anguli vero ABD, ACG ſimul ſunt vel minores vel non minores recto, Ergo [7. 6.] aequiangula ſunt ABD, ACG triangula, ideoque eſt AB ad AC, ut AD ad AG, hoc eſt in data ratione.

Prop. VIII.

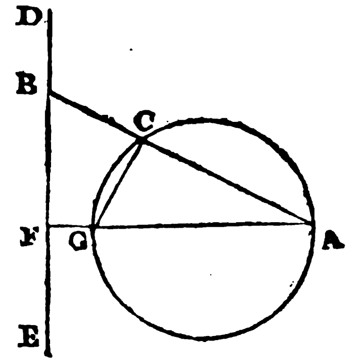
Si a dato puncto ducantur duae rectae lineae in eadem recta, datum continentes ſpatium; tangat autem terminus unius rectam lineam poſitione datam, tanget terminus alterius circumferentiam poſitione datam.

A dato puncto A ducantur AB, AC in eadem recta linea, datum rectangulum BAC continentes; et tangat punctum B rectam lineam DE poſitione datam, tanget punctum C circumferentiam poſitione datam.



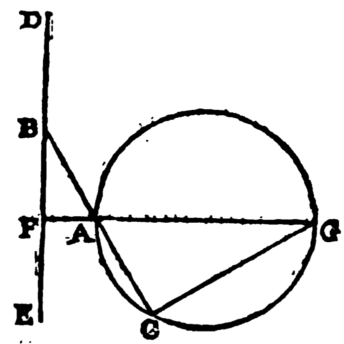
A puncto A ducatur ad DE perpendicularis AF, et in AF inveniatur punctum G in quo Locus punctorum C occurrit ipſi AF, hoc eſt fiat rectangulum FAG aequale dato ſpatio; datum igitur eſt punctum G, data enim eſt AG propter datam AF, [57. dat.]; et quoniam rectangulum BAC eidem dato ſpatio ex hypotheſi aequale eſt, Erunt BAC, FAG rectangula inter ſe aequalia; quare BA eſt ad AF, ut AG ad AC; juncta igitur CG aequiangula erunt triangula BFA, GCA [6. 6.]; ergo eſt angulus ACG aequalis angulo

angulo AFB recto. Quoniam igitur a datis punctis A, G inflexae ſunt AC, GC datum continentes angulum, tanget punctum C circumferentiam poſitione datam, per Prop. 2. hujus.



Componetur vero ita.

Ad datam poſitione rectam DE ducatur perpendicularis AF in qua ſumatur punctum G quod faciat rectangulum FAG aequale ſpatio dato, et ſuper diametrum AG deſcribatur circulus; Erit hujus circumferentia Locus quaeſitus. ducatur enim a puncto A quaevis AC circumferentiae occurrens in C, et rectae DE in B, et CG jungatur. Eſt igitur angulus ACG in ſemicirculo aequalis recto angulo AFB, aequiangula propterea ſunt ACG, AFB triangula, Ergo ut AF ad AB, ita AC ad AG; quare rectangulum BAC aquale eſt ipſi FAG, hoc eſt ſpatio dato.



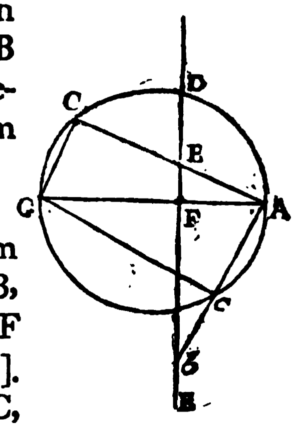
Prop. IX.

Si a dato puncto ducantur duae rectae lineae, in eadem recta, datum continentes ſpatium; et tangat terminus unius circumferentiam poſitione datam; ſi in hac circumferentia fuerit punctum datum, tanget terminus alterius rectam poſitione datam. Si vero punctum datum non fuerit in ea circumferentia, tanget terminus alterius aliam circumferentiam poſitione datam.

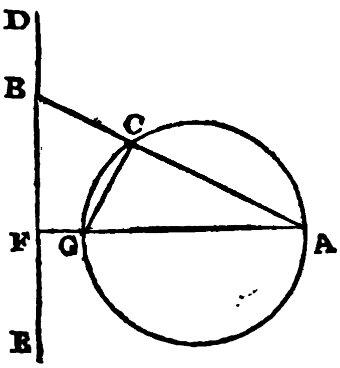
Cas. 1.

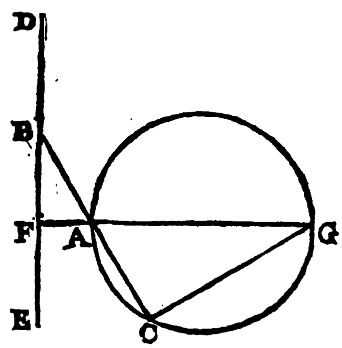
Digitized by Google

Cas. 1. Sit datum punctum A in circumferentia poſitione data, circuli ſc. cujus diameter eſt A G, quae propterea poſitione et magnitudine dabitur; et a puncto A exeant A C, A B in eadem recta linea continentes rectangulum CAB dato ſpatio aequale: tangat autem C circumferentiam cujus diameter eſt AG, tanget punctum B rectam poſitione datam.



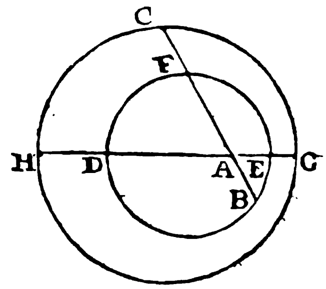
Jungatur enim CG, et in AG ſumatur punctum F quod faciat rectangulum GAF aequale dato CAB, et propter datum latus GA dabitur reliquum AF [57. dat.]; quare datum eſt punctum F [27. dat.]. Eſt autem, propter aequalia rectangula, AG ad AC, ut AB ad AF, juncta igitur BF, aequiangula erunt GAC, BAF triangula; rectus autem eſt angulus ACG in ſemicirculo, quare rectus eſt AFB; et data eſt AF poſitione et punctum F, quare [29. dat.] poſitione data eſt BF; tangit propterea punctum B rectam poſitione datam. Eſt haec converſa praecedentis, et patet compoſitio, faciendo ſc. rectangulum G A F aequale dato ſpatio, et per punctum F ducendo rectam DFE ad rectos angulos ipſi AG.



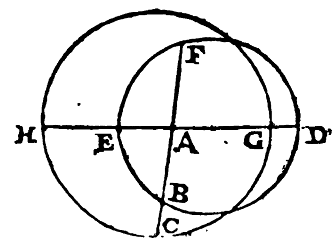


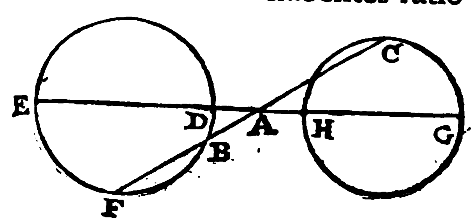
Digitized by Google

Cas. 2. Non autem ſit datum punctum A in circumferentia poſitione data; et ab ipſo exeant rectae AB, AC continentes rectangulum BAC aequale ſpatio dato, tangat autem punctum B circumferentiam poſitione datam, tanget punctum C aliam circumferentiam poſitione datam.



Sit DE diameter circuli dati quae tranſit per punctum A, occurratque AB circumferentiae rurſus in F. Quoniam igitur a dato puncto A, extra vel intra circulum poſitione datum BDE, ducta eſt ABF ad circulum; dabitur [92. aut 93. dat.] rectangulum BAF. et datum, ex hypotheſi, eſt BAC rectangulum; quare ratio ipſorum BAF, BAC data eſt [1. dat.], hoc eſt ratio rectae AF ad ipſam AC data eſt. igitur a dato puncto A in eadem recta linea ductae ſunt AF, AC datam inter ſe habentes rationem, et terminus unius F tangit circumferentiam poſitione datam BDE, Ergo terminus alterius C tanget circumferentiam poſitione datam per Prop. 5. hujus.



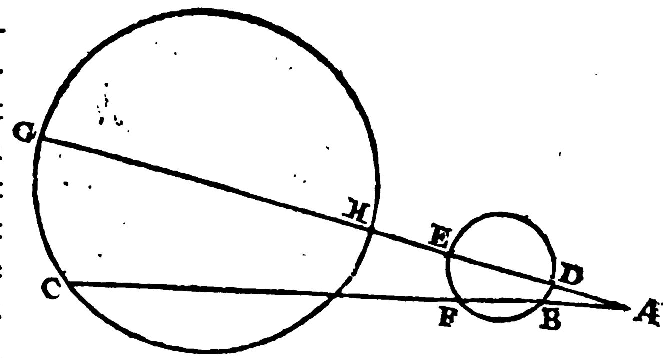


Componetur vero ita.

Sit DE diameter circuli poſitione dati quae tranſit per punctum A; et fiat rectangulum DAG aequale ſpatio dato, ita ſcilicet ut puncta D, G cadant ad eaſdem vel contrarias partes puncti A prout puncta B, C ad eaſdem vel contrarias partes ejuſdem puncti cadere ponuntur. Deſcribatur vero, per Prop. 5. hujus, circulus HCG ita ut ſi a puncto A ducatur quaevis AF ad circulum DFE occurrat haec circulo HCG in puncto quodam C, faciatque AF ad AC in data ratione quam habet AE ad AG, hoc autem fiet faciendo ut AE ad AG, ita AD ad

AH,

AH, et ſuper GH diametrum deſcribendo circulum; Erit hujus circumferentia Locus quaeſitus. A puncto enim A ducatur ad circulum DE quaevis recta AB occurratque eidem rurſus in F, igitur ex conſtructione occurret AF circulo HG in quodam puncto C, et erit AF ad AC, ut AE ad AG; quare [1. 6.] rectangulum BAF eſt ad ipſum



BAC ut rectangulum DAE ad DAG rectangulum. aequalia autem ſunt rectangula BAF, DAE [cor. 36. 3.] Ergo rectangulum BAC aequale eſt ipſi DAG, hoc eſt ſpatio dato. et manifeſtum eſt ſitum punctorum B, C contrarium eſſe ei quem habent puncta F, C.

PROP. X.

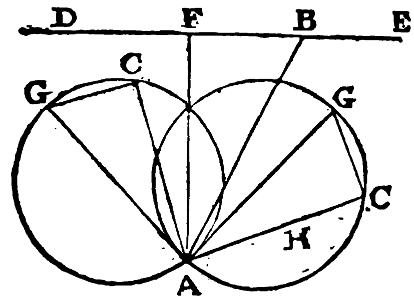
Si a dato puncto ducantur duae rectae lineae datum comprehendentes angulum, et datum continentes ſpatium; tangat autem terminus unius rectam poſitione datam, tanget terminus alterius circumferentiam poſitione datam.

Datum ſit punctum A, et ductae ſint AB, AC datum comprehendentes angulum BAC, ſitque datum rectangulum ipſis BA, AC contentum: tangat autem B rectam poſitione datam DE; tanget C circumferentiam poſitione datam.

Ducatur enim a puncto A ad rectam DE perpendicularis AF, et, ductâ AG quae faciat angulum FAG aequalem angulo BAC et rectangulum FAG aequale rectangulo BAC, jungatur GC. Quoniam igitur

Digitized by Google

tur aequales ſunt anguli F A G, B A C, addito vel dempto communi, aequales erunt anguli F A B, G A C; et propter aequalia rectangula FAG, BAC, erit FA ad AB, ut AC ad AG. quare [6. 6.] aequiangula ſunt FAB, GAC triangula, et angulus A C G aequalis erit angulo recto AFB; poſitione autem data eſt A F [30. dat.], et magnitudine [25. 26. dat.], et datum eſt rectangulum F A G; quare A G magnitudine data [57. dat.], ſed et poſitione propter datum angulum FAG [29. dat.]; datum igitur eſt punctum G [27. dat.]. Quoniam igitur a duobus datis punctis A, G ductae ſunt AC, GC datum comprehendentes angulum ACG, tanget punctum C circumferentiam poſitione datam, per Prop. 2. hujus.



Componetur vero ita.

A dato puncto A ducatur ad poſitione datam D E perpendicularis AF, ducatur etiam AG, ad utraſvis partes rectae AF, faciens tum angulum FAG aequalem angulo dato, tum rectangulum FAG aequale dato ſpatio; et ſuper diametrum AG deſcribatur circulus, Erit hujus circumferentia Locus quaeſitus. Ducatur enim a puncto A ad rectam DE quaevis AB, et fiat angulus B A H aequalis ipſi F A G; occurret A H circumferentiae rurſus in puncto quodam C, et rectangulum BAC aequale erit ipſi FAG. Nam propter aequales angulos FAG, BAH, aequales erunt FAB, GAH; quare acutus eſt angulus GAH, igitur ſecabit circulum recta AH; ſecet in C, et jungatur GC; aequiangula igitur ſunt triangula FAB, GAC, eſt enim angulus ACG in ſemicirculo aequalis angulo recto AFB; Ergo ut AF ad AB, ita eſt AC ad A G, et rectangulum B A C aequale erit ipſi F A G, hoc eſt ſpatio dato.

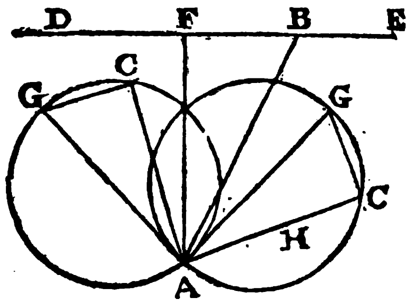
PROP.

Digitized by Google

Prop. XI.

SI a dato puncto ducantur duae rectae lineae datum comprehendentes angulum, et datum continentes ſpatium, et tangat terminus unius circumferentiam poſitione datam; ſi in hac circumferentia fuerit punctum datum, tanget terminus alterius rectam poſitione datam. Si vero punctum datum non fuerit in ea circumferentia, tanget terminus alterius aliam circumferentiam poſitione datam.

Cas. 1. Sit datum punctum A in circumferentia poſitione data, circuli ſcil. cujus diameter eſt AG, quae propterea poſitione et magnitudine dabitur. et a puncto A ducantur rectae AC, AB datum facientes angulum CAB, et datum continentes ſpatium. Tangat autem C circumferentiam cujus diameter eſt AG, tanget punctum B rectam poſitione datam.

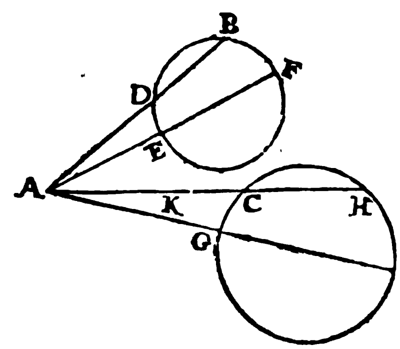


Jungatur enim CG, et ducatur AF faciens angulum GAF aequalem angulo CAB, et rectangulum GAF aequale ipſi CAB, ita ut AF, AB ſint ad eaſdem partes rectarum AG, AC; et BF jungatur. Erunt igitur triangula FAB, CAG aequiangula, et propterea angulus AFB aequalis angulo recto ACG. quoniam vero data eſt AG poſitione, datuſque eſt CAB ſeu GAF angulus, et datum punctum A; dabitur poſitione recta AF [29. dat.]; ſed et magnitudine, propter datam magnitudine rectam AG, datumque rectangulum GAF; datum igitur eſt F punctum, datuſque eſt angulus rectus AFB, quare recta FB quam tangit punctum B poſitione data eſt. patet autem compoſitio, ducendo ſc. rectam AF ut dictum fuit, et per F rectam FE ad rectos angulos ipſi AF.

Digitized by Google

Cas. 2. Non autem ſit datum punctum A in circumferentia poſitione data; et ductae ſint A B, A C datum comprehendentes angulum B A C, datumque continentes ſpatium: tangat autem B terminus circumferentiam B D E poſitione datam, tanget quoque C terminus aliam circumferentiam poſitione datam.

Occurrat enim AB circumferentiae rurſus in D, et quoniam a dato puncto A ad circulum poſitione datum ducta eſt ADB, dabitur [92. aut 93. dat.] rectangulum BAD; datumque ex hypotheſi eſt rectangulum BAC, quare [1. dat.] datur ratio rectanguli B A D ad ipſum BAC, hoc eſt datur ratio rectae A D ad A C. quoniam igitur a dato puncto A ductae ſunt AD, AC datum comprehendentes angulum D A C, datamque inter ſe rationem habentes, terminus autem unius D tangit circumferentiam poſitione datam BDE, terminus C alterius tanget circumferentiam poſitione datam, per Prop. 7. hujus.



Componetur vero ita.

A dato puncto A ducatur per centrum circuli poſitione dati recta AEF, et ab eodem puncto ducatur recta AG quae faciat tum angulum F A G aequalem angulo dato, tum rectangulum F A G aequale ſpatio dato; et per compoſitionem Prop. 7. hujus deſcribatur circumferentia quae locus eſt punctorum G quae ſc. termini ſunt rectarum A G quae cum ductis A E ad circumferentiam B D E comprehendunt angulum dato F A G aequalem, et ad quas rectae A E rationem habent aequalem rationi AE ad AG. Sit circumferentia deſcripta GCH, Erit haec Locus quaeſitus, hoc eſt ſi ducatur quaevis AB a puncto A ad circulum BDE, et ab eodem puncto ducatur AK faciens angulum BAK aequalem ipſi FAG, occurret AK circulo GCH [ut patet ex Prop. 7. hujus] in punctis duobus C, H, eritque rectangulum BAC aequale dato rectangulo FAG, dummodo ſc. ſumantur eae rectarum ADB, ACH interſectiones cum circulis quae ſunt ad ipſorum partes

tes

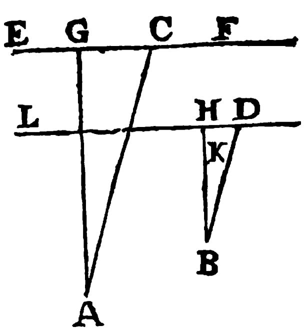
tes contrarias. Quoniam enim per conſtructionem [ſc. per Prop 7. hujus] eſt A D ad AC, ut A E ad AG, erit rectangulum BAD ad ipſum BAC, ut (AE ad AG, hoc eſt ut) rectangulum FAE ad ipſum FAG. Eſt autem BAD aequale rectangulo FAE, ergo et BAC aequale eſt ipſi FAG, hoc eſt ſpatio dato. Et quoniam ex eadem Prop. 7. eſt AD ad AC, ut AB ad AH, erit rectangulum DAH aequale ipſi BAC ſeu FAG, hoc eſt ſpatio dato.

PROP. XII.

SI a duobus punctis datis ducantur duae rectae lineae parallelae datam habentes rationem; tangat autem terminus unius rectam poſitione datam, tanget quoque terminus alterius rectam poſitione datam.

SINT A, B duo puncta data, et ab ipſis ducantur AC, BD parallelae datamque habentes rationem; tangat autem C rectam EF poſitione datam, tanget etiam D rectam poſitione datam.

Ducatur enim ad EF perpendicularis AG quae poſitione [30. dat.] et magnitudine [25. 26. dat.] dabitur. Et a puncto B ducta BH (ad utraſvis partes) parallela ipſi AG, ita ut AG ſit ad BH in data ratione quam habet AC ad BD, dabitur poſitione BH [28. dat.] ſed et magnitudine [2. dat.] quare, propter punctum B datum, dabitur punctum H [27. dat.]. Jungatur DH, et quoniam parallelae ſunt AG, BH; ut et AC, BD; aequales erunt anguli GAC, HBD. Et eſt AG ad BH, ut AC ad BD, aequiangula propterea ſunt GAC, HBD triangula [6. 6.], et angulus BHD aequalis angulo recto AGC. Quoniam igitur a dato puncto H, in recta poſitione data BH, ducta eſt HD in dato angulo, poſitione dabitur HD [29. dat.] ideoque tangit punctum D rectam poſitione datam.



 Componetur

Componetur vero ita.

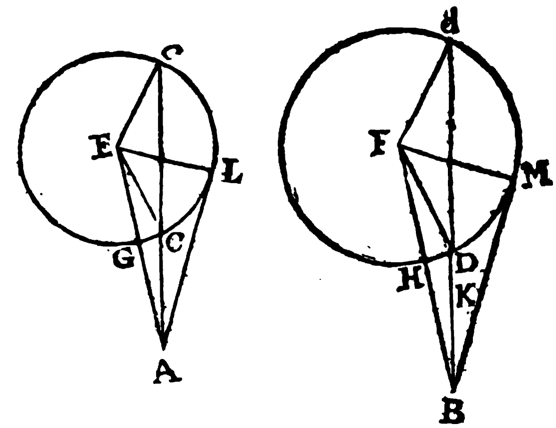
Ducatur ad EF perpendicularis AG, et ipſi per punctum B agatur parallela BK in qua ſumatur BH ad quam AG datam habet rationem, et per H ducatur HL parallela ipſi EF; Erit haec Locus quaeſitus, ſc. ſi a punctis A, B ducantur ad EF, LH quaevis parallelae AC, BD, aequiangula erunt triangula GAC, HBD, quare eſt AC ad BD, ut AG ad BH, hoc eſt in ratione data.

Prop. XIII.

Si a duobus punctis datis ducantur duae rectae parallelae datamque habentes rationem; tangat autem terminus unius circumferentiam poſitione datam, tanget quoque terminus alterius circumferentiam poſitione datam.

Data ſint A, B puncta, et ab ipſis ducantur AC, BD parallelae datamque habentes rationem; tangat autem C circumferentiam circuli poſitione dati cujus centrum E, tanget quoque D aliam circumferentiam poſitione datam.

Jungatur enim AE, cui, ad utraſvis partes, ducatur a puncto B parallela BF, ita ut AE ſit ad BF in data ratione quam habet AC ad BD, et jungantur EC, FD. Dabitur igitur BF poſitione et magnitudine, datumque erit punctum F; et aequiangula erunt AEC, BFD triangula, quae ut in praecedente oſtenduntur. quare eſt EC ad FD, ut AC ad BD, hoc eſt in ratione data; et data eſt EC magnitudine, quare et FD [2. dat.]; et datum eſt punctum



Digitized by Google

punctum F; ergo tangit D circumferentiam poſitione datam per Prop. 1. hujus.

Componetur vero ita.

Jungatur AE circumferentiae occurrens in G, et a puncto B ducatur ipſi AE parallela, et in ipſa ſumatur BF ad quam AE, et FH ad quam EG datam habet rationem; centroque F intervallo FH deſcribatur circulus: Erit hujus circumferentia Locus quaeſitus, hoc eſt ſi a puncto A ducatur quaevis A C, circumferentiae cujus centrum eſt E occurrens in C, c, et ipſi AC parallela ducatur BK; occurret haec circumferentiae cujus centrum eſt F in punctis duobus D, d; et erit AC ad BD in data ratione quam habet AE ad BF, ſc. ſi ſumantur puncta C, D vel c, d quae ſunt ad eaſdem circulorum partes ratione punctorum A, B. Ducantur enim AL, BM circulos ad partes C, D contingentes, et jungantur EL, FM. Erunt triangula AEL, BFM aequiangula, quod prorſus ut in Lemmate 1° oſtenditur; aequales igitur ſunt anguli EAL, FBM; et aequales ſunt EAC, FBK anguli, propter AE, BF et AC, BD inter ſe parallelas; quoniam igitur AC cadit intra angulum EAL, cadet BK intra angulum FBM, et propterea circulo occurret; occurrat in D, d, et jungantur EC, FD. et quoniam ex conſtructione eſt AE ad BF, ut EG ad FH, hoc eſt EC ad FD, et in triangulis AEC, BFD aequales ſunt anguli EAC, FBD, et reliqui ad C, D ſunt vel ſimul minores vel non minores recto, erunt AEC, BFD triangula aequiangula [7. 6.] ideoque eſt AC ad BD, ut AE ad BF, hoc eſt in ratione data.

Prop. XIV.

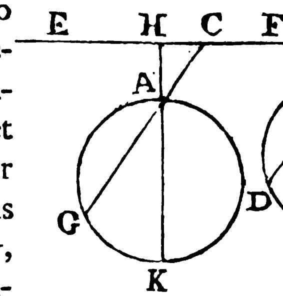
Si a duobus punctis datis ducantur duae rectae parallelae datum continentes ſpatium; tangat autem terminus unius rectam poſitione datam, tanget terminus alterius circumferentiam poſitione datam.

Sint

Digitized by Google

Sint A, B puncta data, et ab ipſis ducantur AC, BD parallelae, et datum continentes ſpatium; tangat autem C rectam EF poſitione datam, tanget D circumferentiam poſitione datam.

Sumatur enim in recta AC, ad utraſvis partes, recta AG aequalis ipſi BD. Et quoniam a dato puncto A ductae ſunt AC, AG in eadem recta datum continentes ſpatium, et tangit C rectam poſitione datam, tanget G circumferentiam poſitione datam per Prop. 8. hujus. Et quoniam a duobus punctis datis A, B ductae ſunt AG, BD parallelae datamque habentes rationem, aequales enim ſunt, et tangit G circumferentiam poſitione datam, tanget D aliam circumferentiam poſitione datam per Prop. praecedentem.



Componetur vero facile ope compoſitionum Prop. 8. et praecedentis 13. ſc. ducendo a puncto A ad rectam EF perpendicularem AH, et in ipſa ſumendo punctum K quod faciat rectangulum HAK aequale ſpatio dato, et a puncto B ducendo BL parallelam et aequalem ipſi AK, et ſuper diametrum BL deſcribendo circulum; erit enim hujus circumferentia Locus quaeſitus, hoc eſt ſi ducatur a puncto A ad rectam EF quaevis AC, et a puncto B recta parallela ipſi AC circulo BDL occurrens in D, erit rectangulum contentum AC, BD aequale ipſi HAK. Intelligatur enim circulus deſcriptus ſuper diametrum AK cui occurrat AC in G; et, per Prop. 13. hujus, quoniam aequales ſunt BL, AK, aequales erunt BD, AG. per Prop. vero 8. hujus rectangulum CAG, hoc eſt contentum ipſis CA, BD, aequale eſt rectangulo HAK, hoc eſt ſpatio dato.

Prop.

Digitized by Google

Prop. XV.

Si a duobus punctis ducantur duae rectae parallelae, datum continentes ſpatium, tangat autem terminus unius circumferentiam poſitione datam; ſi punctum datum a quo haec ducta eſt fuerit in ea circumferentia, tanget terminus alterius rectam poſitione datam. Si vero punctum illud non fuerit in ea circumferentia, tanget terminus alterius aliam circumferentiam poſitione datam. *Vide fig. praeced.*

Cas. 1. Sint data puncta B, A, quorum B ſit in circumferentia poſitione data, circuli ſc. cujus diameter eſt BL, et ducantur BD, AC inter ſe parallelae, et datum continentes ſpatium; terminus vero D ſit in circumferentia BDL; tanget terminus C rectam poſitione datam.

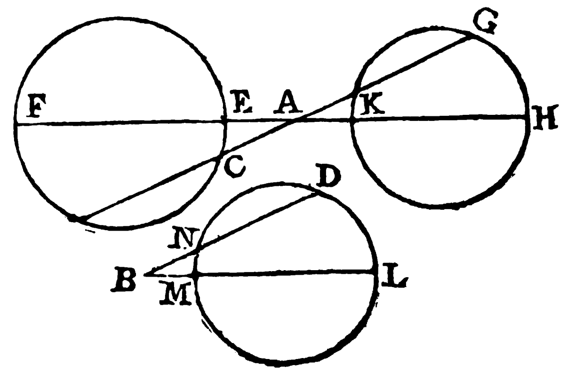
Sumatur enim in A C punctum G faciens A G aequalem ipſi B D, et per Prop. 13. hujus tanget punctum G circumferentiam poſitione datam, circuli ſc. cujus diameter AK aequalis et parallela eſt ipſi BL. et quoniam a dato puncto A ductae ſunt AC, AG in eadem recta, et datum continentes ſpatium, et eſt terminus G in circumferentia poſitione data in qua eſt A, tanget terminus C rectam poſitione datam per Prop. 9. hujus Cas. 1. Eſt haec converſa praecedentis, et compoſitio obvia eſt ex iis in Prop. 9. et 13. hujus, ſc. ducendo AH parallelam ipſi BL quae faciat rectangulum contentum AH, BL, ſeu rectangulum HAK aequale ſpatio dato, et ducendo per H rectam EHF ad rectos angulos ipſi HA. ductis enim BD, AC parallelis, erit rectangulum BD, AC hoc eſt GAC aequale ipſi HAK, ſeu contento AH, BL, hoc eſt ſpatio dato.

Cas. 2.

Digitized by Google

Cas. 2. Sint A, B puncta data, et ab ipſis ducantur parallelae AC, BD datum continentes ſpatium, et tangat C circumferentiam poſitione datam cujus diameter quae tranſit per A eſt EF, non autem ſit A in ea circumferentia; tanget etiam D aliam circumferentiam poſitione datam.

Sumatur enim in AC recta AG aequalis ipſi BD, et quoniam a dato puncto A ductae ſunt AC, AG in eadem recta linea, et datum continentes ſpatium, et eſt terminus C in circumferentia poſitione data ECF, in eadem vero non eſt punctum A, tanget punctum G circumferentiam poſitione datam per Cas. 2. Prop. 9. hujus. Et quoniam a duobus punctis datis A, B ductae ſunt AG, BD parallelae, datam habentes rationem, aequales enim ſunt, et tangit G circumferentiam poſitione datam, tanget quoque D circumferentiam poſitione datam per Prop. 13. hujus.



Componetur vero ope compoſitionum Cas. 2. Prop. 9. et Prop. 13. hujus, ſc. Sumatur in AF recta AH quae faciat rectangulum EAH aequale ſpatio dato, et ut AF ad AH, ita fiat AE ad AK; per B vero ducatur recta parallela ipſi AH, in qua ſumantur BL, BM aequales ipſis AH, AK, et ſuper diametrum ML deſcribatur circulus, erit hujus circumferentia Locus quaeſitus. a puncto enim A ducatur ad circulum ECF quaevis AC, cui a puncto B parallela ducatur BN, occurret haec circulo MDL in quodam puncto D, et rectangulum AC, BD aequale erit ipſi EAH; deſcribatur enim ſuper diametrum KH circulus KGH, et per Cas. 2. Prop. 9. huic occurret recta AC in puncto quodam G ita ut rectangulum CAG aequale ſit ipſi EAH. per Prop. autem 13. quoniam ſc. BL, BM aequales ſunt ipſis AH, AK in rectis parallelis, occurret BN circulo MDL in puncto quodam D ita

Digitized by Google

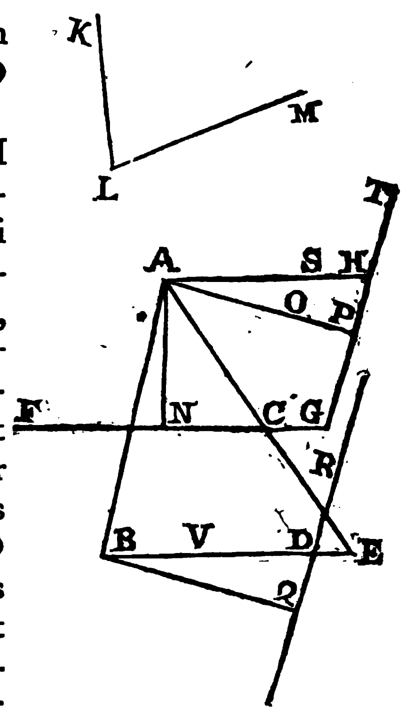
D ita ut aequalis ſit BD ipſi AG, igitur rectangulum AC, BD (ſeu CAG) aequale eſt ipſi EAH, hoc eſt ſpatio dato.

Patet vero non opus fuiſſe rectis AH, AK ad inveniendas ipſas BL, BM, et deſcribendum circulum Localem MDL; ſed ad compoſitionem perficiendam. idemque in ſequentibus quibuſdam obſervandum.

Prop. XVI.

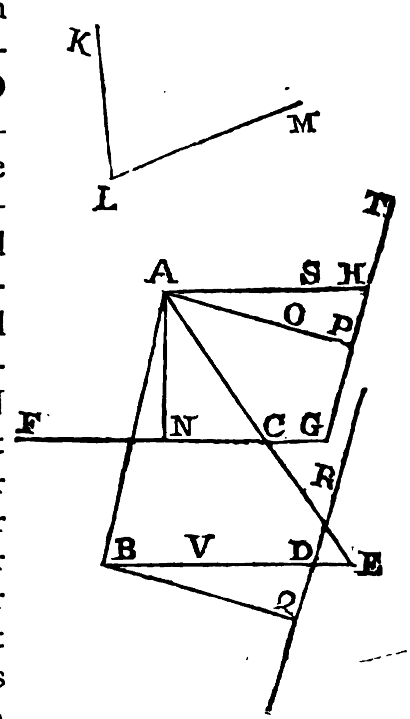
Si a duobus punctis datis ducantur duae rectae lineae datum continentes angulum, et datam habentes rationem; tangat autem terminus unius rectam poſitione datam, tanget terminus alterius rectam poſitione datam.

Sint A, B puncta data, et ab ipſis ducantur AC, BD datum continentes angulum AEB, datamque habentes rationem; tangat autem C rectam FG poſitione datam, tanget quoque D rectam poſitione datam.



Per punctum A ducatur recta AH parallela et aequalis rectae BD, et propter angulum AEB datum, dabitur ipſi aequalis angulus CAH. Quoniam igitur a dato puncto A ductae ſunt AC, AH datum continentes angulum, datamque habentes rationem, et tangit punctum C rectam poſitione datam, tanget quoque H rectam poſitione datam per Prop. 6. hujus. Et quoniam a duobus datis punctis A, B ductae ſunt AH, BD inter ſe parallelae, datamque habentes rationem, aequales enim ſunt, et tangit punctum H rectam poſitione datam, tanget etiam D rectam poſitione datam per Prop. 12. hujus.

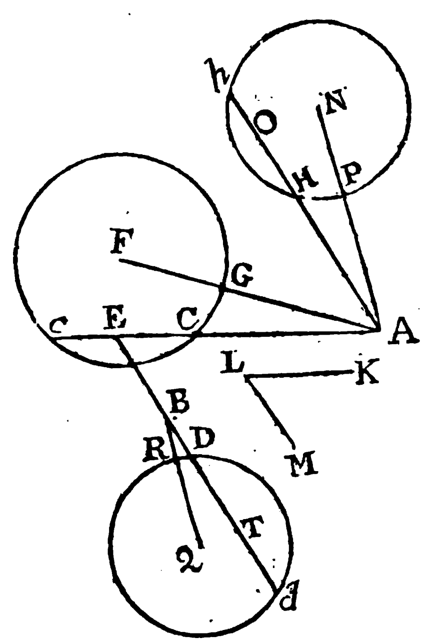
Componetur vero ope compoſitionum Prop. 6. et 12. ita. Sit datus angulus KLM, et data ratio quam ducenda a puncto A habere debet ad ducendam a puncto B, ſit ea quam habet KL ad LM. et a puncto A ducatur ad FG perpendicularis AN, et AO quae faciat angulum NAO aequalem ipſi KLM, ad quas autem partes junctae AB ducenda ex hypotheſi eſt AE ut angulus AEB aequalis ſit angulo KLM, ad eaſdem rectae AN ducenda eſt AO, poterit enim requiri ut angulus AEB ſit ad utramvis partem rectae AB. Sumatur vero in AO recta AP ad quam habet AN rationem eandem quam KL ad LM, et a puncto B, ad utramvis partem ducatur BQ aequalis et parallela ipſi AP, et per Q ad rectos angulos ipſi BQ ducatur QR, erit haec Locus quaeſitus. ducatur enim a puncto A ad FG recta AC, et ab eodem puncto ducatur AS faciens angulum CAS aequalem dato angulo KLM; et ſit PT ad rectos angulos ipſi AP. Eſt igitur PT Locus in Prop. 6. deſcriptus, quare recta AS rectae PT occurret in quodam puncto H ita ut AC erit ad AH, ut KL ad LM. ducatur BV parallela ipſi AH, occurratque ipſi AC in E, et quoniam angulus BEA aequalis eſt ipſi CAS, hoc eſt angulo KLM, erit BE recta quae cum AC continet angulum dato angulo aequalem. quoniam vero aequales et parallelae ſunt AP, BQ rectae, et parallelae ſunt PT, QR ut et AH, BV, occurret [Prop. 12. huj.] BV ipſi QR in puncto D ita ut aequales erunt AH, BD. Ergo eſt AC ad BD, ſeu AH, ut KL ad LM.



Prop. XVII.

Si a duobus punctis datis ducantur duae rectae lineae datum continentes angulum, datamque habentes rationem; tangat autem terminus unius circumferentiam poſitione datam, tanget terminus alterius circumferentiam poſitione datam.

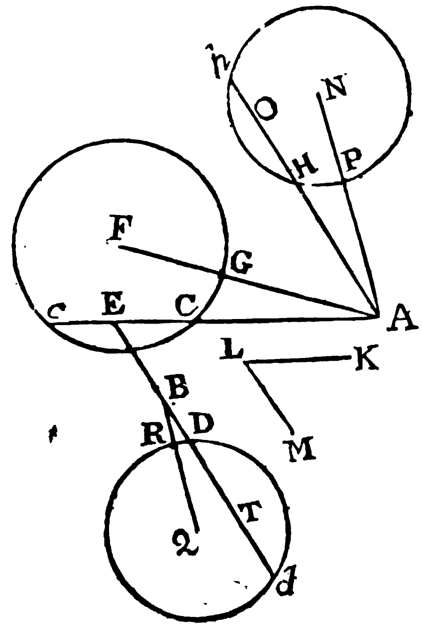
Sint A, B puncta data, et ab ipſis ducantur AC, BD datum continentes angulum AEB, datamque habentes rationem; tangat autem C circumferentiam poſitione datam circuli ſc. cujus centrum eſt F, et FG ſemidiameter quae tranſit per A; tanget etiam D circumferentiam poſitione datam.



Per punctum A ducatur AH parallela et aequalis ipſi BD, ita ut anguli AEB, CAH ſint aequales, et propter angulum AEB datum dabitur angulus CAH. Quoniam igitur a dato puncto A ductae ſunt AC, AH datum continentes angulum, datamque habentes rationem, et tangit C circumferentiam poſitione datam, tanget quoque H circumferentiam poſitione datam, per Prop. 7. hujus. Et quoniam a duobus datis punctis A, B ductae ſunt AH, BD parallelae, datamque habentes rationem, aequales enim ſunt; et tangit punctum H circumferentiam poſitione datam, tanget quoque D circumferentiam poſitione datam, per Prop. 13. hujus.

 Compo-

Componetur vero ope compoſitionum Prop. 7. et 13. ita. Sit datus angulus KLM, et data ratio quam ducenda a puncto A habere debet ad ducendam a puncto B, ſit ea quam habet recta KL ad rectam LM, et hiſce datis, datoque circulo cujus centrum F, deſcribi intelligatur per Prop. 7. circulus cujus centrum N, talis ſc. ut ductâ quavis AC ad circulum cujus centrum F, ſi ducatur AO faciens angulum CAO aequalem ipſi KLM, occurret haec circulo cujus centrum N in quodam puncto H, ita ut AC ſit ad AH, ut KL ad LM; et juncta AN circulo occurrat in P. ducatur vero per B recta ipſi AN parallela, in qua ad utramvis partem ſumantur BQ, BR, aequales ipſis AN, AP, et centro Q intervallo QR deſcribatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaeſitus. ducatur enim BT parallela ipſi AH, occurratque AC in E; eſt igitur angulus BEA aequalis angulo CAO hoc eſt ipſi KLM, et quoniam BQ, BR aequales ſunt ipſis AN, AP, in rectis parallelis, et parallelae ſunt AH, BT; per Prop. 13. hujus occurret BT circulo cujus centrum Q in puncto quodam D, ita ut aequales erunt AH, BD. Eſt autem per Prop. 7. hujus, AC ad AH ſeu BD, ut KL ad LM; Et propterea circumferentia centro Q deſcripta eſt Locus quaeſitus.



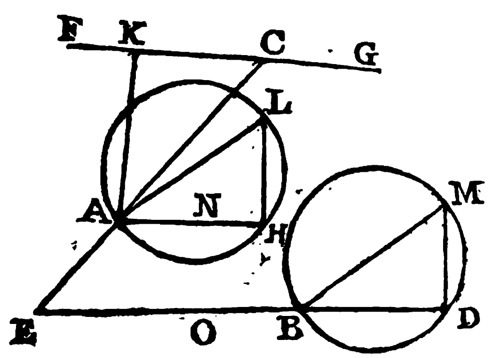
PROP.

Prop. XVIII.

SI a duobus punctis datis ducantur duae rectae lineae datum comprehendentes angulum, et datum continentes ſpatium; tangat autem terminus unius rectam poſitione datam, tanget terminus alterius circumferentiam poſitione datam.

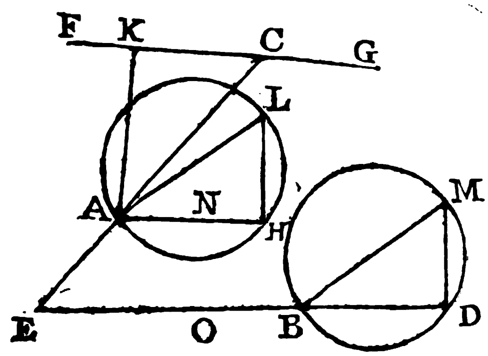
Sint A, B puncta data et ab ipſis ducantur AC, BD datum comprehendentes angulum AEB, et datum continentes ſpatium; tangat autem punctum C rectam FG poſitione datam, tanget D punctum circumferentiam poſitione datam.

Per punctum A ducatur recta AH parallela et aequalis rectae BD, et propter angulum AEB datum dabitur ipſi aequalis angulus CAH. Quoniam igitur a dato puncto A ductae ſunt AC, AH datum facientes angulum, datumque continentes ſpatium, et tangit punctum C rectam poſitione datam; tanget H circumferentiam poſitione datam, per Prop. 10. hujus. et quoniam AH, BD parallelae ſunt et aequales, et tangit H circumferentiam poſitione datam, tanget quoque D circumferentiam poſitione datam, per Prop. 13. hujus.



Componetur vero ope Prop. 10. et 13. ſc. Ducatur ad FG perpendicularis AK, et ducatur AL faciens tum angulum KAL dato angulo aequalem, tum rectangulum KAL aequale ſpatio dato; et per punctum B ducta ſit BM parallela et aequalis ipſi AL. Erit circumferentia circuli ſuper diametrum BM deſcripti Locus quaeſitus. Intelligatur

gatur enim deſcribi circulus ſuper diametrum AL, et quoniam hujus circumferentia Locus eſt in Prop. 10. deſcriptus, ductâ quavis AC ad FG, ſi ducatur AN faciens angulum CAN aequalem ipſi KAL, occurret haec circulo ALH in puncto H quod faciet rectangulum CAH aequale ipſi KAL. ducatur BO parallela rectae AH, occurratque ipſi CA in E. angulus igitur BEA aequalis eſt ipſi CAH hoc eſt angulo dato KAL, et propter aequales et parallelas AL, BM, et parallelas AH, OB, occurret [Prop. 13. huj.] OB circulo BMD in puncto quodam D, ita ut aequales erunt AH, BD; oſtenſum autem eſt rectangulum CAH aequale ipſi KAL, quare et rectangulum contentum AC, BD eidem KAL, hoc eſt ſpatio dato, eſt aequale.



Prop. XIX.

Si a duobus punctis datis ducantur duae rectae lineae datum comprehendentes angulum, et datum continentes ſpatium; et tangat terminus unius circumferentiam poſitione datam, ſi punctum datum a quo haec ducta eſt fuerit in ea circumferentia, tanget terminus alterius rectam poſitione datam. Si vero punctum datum non fuerit in ea circumferentia, tanget terminus alterius aliam circumferentiam poſitione datam. *Vide fig. praeced.*

Caſ. 1.

Cas. 1. Sint A, B puncta data, quorum B ſit in circumferentia poſitione data, circuli ſc. cujus diameter eſt BM, et ducantur BD, AC datum comprehendentes angulum BEA, et datum continentes ſpatium; tangat autem D circumferentiam BDM; tanget terminus C rectam poſitione datam.

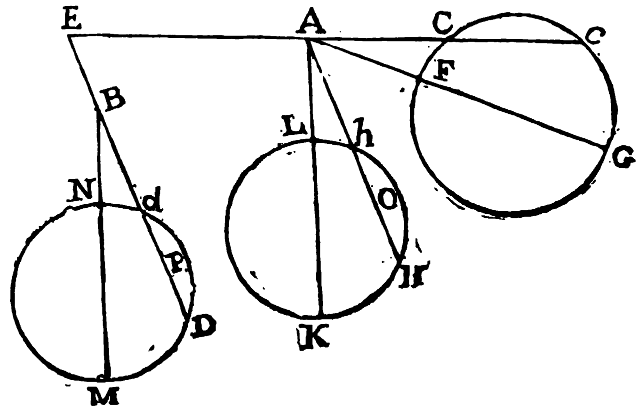
A puncto A ducatur recta AH parallela et aequalis ipſi BD, quoniam igitur data ſunt B, A puncta, et tangit D circumferentiam poſitione datam per B tranſeuntem, tanget et H circumferentiam poſitione datam per A tranſeuntem, per Prop. 13. huj. et datus eſt angulus HAC, aequalis ſc. dato angulo BEA, ergo quoniam a dato puncto A ductae ſunt AC, AH datum facientes angulum, et eſt rectangulum CAH aequale dato quod AC, BD continetur ſpatio, punctum autem H eſt in circumferentia in qua eſt A, tanget C rectam poſitione datam per Cas. 1. Prop. 11.

Componetur vero ope Prop. 13. et Cas. 1. Prop. 11. ſc. ducendo AL parallelam et aequalem ipſi BM, et AK quae faciat tum angulum KAL aequalem dato angulo, tum rectangulum KAL aequale dato ſpatio, et per K ducendo rectam FKG ad rectos angulos ipſi AK; erit enim FG Locus quaeſitus. Ductâ enim ad FG quâvis AC, ducatur AN faciens angulum CAN aequalem ipſi KAL; occurret haec [cas. 1. Prop. 11.] circumferentiae circuli ſuper diametrum AL in puncto H quod faciet rectangulum CAH aequale ipſi KAL; et per B ductâ BO parallelâ ipſi AH, occurrat BO rectae AC in E. eſt igitur BO recta quae cum AC comprehendit angulum BEA aequalem angulo HAC, hoc eſt dato angulo KAL. Et per Prop. 13. huj. occurret BO circulo ſuper diametrum BM in puncto D, ita ut BD aequalis erit ipſi AH; et propterea rectangulum contentum AC, BD aequale eſt ipſi CAH hoc eſt dato rectangulo KAL.

Cas. 2.

Digitized by Google

Cas. 2. Sint A, B puncta data, et ab ipſis ducantur AC, BD datum comprehendentes angulum AEB, et datum continentes ſpatium, et tangat punctum C circumferentiam poſitione datam, cujus quae per A tranſit diameter eſt FG, non autem ſit A in ea circumferentia; tanget quoque D aliam circumferentiam poſitione datam.



Ducatur enim AH parallela et aequalis ipſi BD, et quoniam datus eſt angulus AEB dabitur eidem aequalis CAH, et datum eſt rectangulum CAH, ergo per Cas. 2. Prop. 11. huj. tangit punctum H circumferentiam poſitione datam. Et quoniam a duobus punctis datis A, B ductae ſunt AH, BD parallelae et aequales, et tangit punctum H circumferentiam poſitione datam, tanget etiam D circumferentiam aliam poſitione datam per Prop. 13. hujus.

Componetur vero ope Cas. 2. Prop. 11. et Prop. 13. ducendo ſc. rectam AK quae faciat tum angulum FAK aequalem dato angulo, tum rectangulum FAK aequale dato ſpatio, et invento KL diametro ſc. circuli in Cas. 2. Prop. 11. deſcripti, ducatur a puncto B recta ipſi AK parallela, in qua ſumantur BM, BN aequales ipſis AK, AL; circumferentia circuli ſuper diametrum MN deſcripti, erit Locus quaeſitus. Ducatur enim a puncto A quaevis AC ad circulum cujus diameter eſt FG, et ab eodem puncto ducatur AO faciens angulum CAO aequalem ipſi FAK, et per Cas. 2. Prop. 11. occurret AO circulo ſuper diametrum KL in puncto H, ita ut rectangulum CAH aequale erit ipſi FAK. a puncto vero B ducatur BP parallela ipſi AO, occurratque ipſi CA in E. Eſt igitur BP recta quae cum CA comprehendit angulum AEB aequalem angulo CAH, hoc eſt dato angulo

Digitized by Google

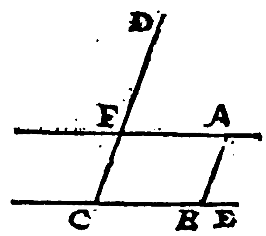
gulo FAK. Et per Prop. 13. quoniam BM, BN aequales et parallelae ſunt ipſis AK, AL, et eſt BP parallela ipſi AH, occurret BP circulo NMD in puncto D, ita ut aequales erunt BD, AH, et propterea rectangulum contentum AC, BD aequale eſt ipſi CAH, hoc eſt dato rectangulo FAK.

Prop. XX.

Si rectae lineae magnitudine datae, atque parallelae rectae poſitione datae, extremitas una tangat rectam poſitione datam; tanget quoque altera rectam poſitione datam.

Sit recta AB magnitudine data, et parallela poſitione datae rectae CD; tangat autem punctum B rectam CE poſitione datam; tanget quoque punctum A rectam poſitione datam.

Quoniam poſitione dantur rectae CD, CE dabitur punctum C [25. dat.]. In CD vero ſumatur CF aequalis ipſi BA, et verſus eaſdem partes; magnitudine igitur data eſt CF, quoniam et BA; ſed et poſitione, et datum eſt punctum C; ergo datum eſt F punctum [27. dat.]. Jungatur AF, et propter aequales et parallelas AB, FC, parallela erit FA ipſi CB. Quoniam igitur per datum punctum F ducta eſt FA parallela poſitione datae CE, poſitione dabitur FA [28. dat.]; tangit propterea punctum A rectam poſitione datam.



Compoſitio manifeſta eſt, ſc. in recta CD ſumatur CF aequalis rectae magnitudine datae, et per F ducatur FA parallela ipſi CE. Erit haec Locus quaeſitus, A quovis enim in ipſa puncto A, ducatur AB parallela rectae CD; erit AB aequalis ipſi CF, hoc eſt rectae datae, ut patet ex 34. 1.

Digitized by Google

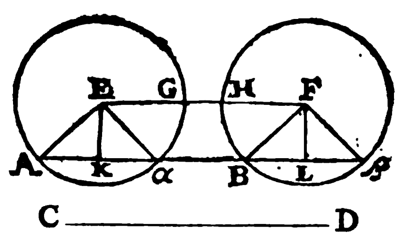
Prop. XXI.

Haec a Cl. Fermatio *praecedenti adjicitur.*

Si rectae lineae magnitudine datae quae rectae poſitione datae parallela eſt, extremitas una tangat circumferentiam poſitione datam; tanget quoque extremitas altera circumferentiam poſitione datam.

Sit recta AB magnitudine data, et parallela poſitione datae CD. Tangat autem punctum A circumferentiam poſitione datam, cujus centrum eſt E; tanget quoque B circumferentiam poſitione datam.

A centro E ducatur, ad utraſvis partes, recta EF parallela et aequalis ipſi AB, junganturque AE, BF; et quoniam data eſt AB magnitudine, dabitur et magnitudine EF, et quoniam AB parallela eſt poſitione datae CD, erit EF eidem parallela, datum autem eſt punctum E, ergo poſitione data eſt EF [28. dat.], ſed et magnitudine; datur igitur punctum F [27. dat.]; et quoniam data eſt AE magnitudine, dabitur magnitudine ipſi aequalis [33. 1.] BF. et datur punctum F, ergo tangit punctum B circumferentiam poſitione datam per Prop. 1. hujus.



Componetur vero ita.

Ducatur per centrum E circuli poſitione dati recta ipſi CD parallela, et in ea ſumatur, ad utraſvis partes, recta EF aequalis rectae magnitudine datae. Occurrat vero EF circumferentiae in G, et ipſi EG aequalis ſumatur FH; centroque F et intervallo FH circulus deſcribatur. Erit hujus circumferentia Locus quaeſitus; hoc eſt, ſi a quovis puncto A in circumferentia cujus centrum eſt E, ducatur recta parallela ipſi CD, occurret haec circulo cujus centrum eſt F in quodam puncto B, ut patet; et erit AB aequalis ipſi EF, dummodo ſc. puncta A, B ſita ſint ad eaſdem circulorum partes. Junctis enim AE, BF ducantur

Digitized by Google

ducantur ad AB perpendiculares EK, FL; haec inter ſe aequales erunt [34. 1.], et aequales ſunt AE, BF; quare in triangulis AEK, BFL, aequales ſunt AK, BL [47. 1.], ideoque eſt AB aequalis ipſi KL, hoc eſt ipſi EF, hoc eſt rectae magnitudine datae.

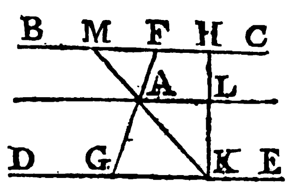
Prop. XXII.

Si a puncto ad duas parallelas rectas poſitione datas, ducantur duae rectae lineae vel in eadem recta linea, vel in datis angulis; datamque habentes proportionem: tanget punctum rectam poſitione datam.

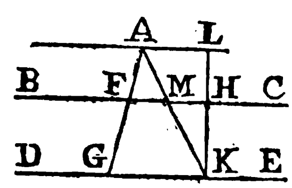
A puncto A ad datas poſitione parallelas BC, DE, ductae ſint AF, AG vel in eadem recta, vel in datis angulis; et in utroque caſu datam habentes proportionem: tanget punctum A rectam poſitione datam.

Cas. 1. Quando ductae AF, AG ſunt in recta linea.

Ex 37. et 38. Datorum patet parallelam per A ductam utrilibet rectarum BC, DE, poſitione datam eſſe; quare tangit punctum A rectam hanc poſitione datam. Compoſitio autem ex iiſdem datis manifeſta eſt, ſc.

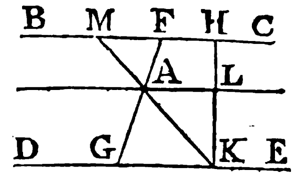


A puncto quovis H in recta BC ducatur utcunque ad DE recta HK, et ſi debet punctum A inveniri inter parallelas, ſecetur HK in L, ita ut ſit HL ad LK in data ratione quam ducenda ad BC habere debet ad ducendam ad DE; ſi vero requiratur ut punctum A ſit extra parallelas puta ad partes ipſius BC, producatur KH ad L, ita ut HL ſit ad LK in praedicta data ratione. per punctum vero L ducatur recta parallela utrilibet rectarum BC, DE; Erit haec Locus quaeſitus, hoc eſt ſi a quovis in ipſa puncto A ducatur utcunque recta ipſis BC,

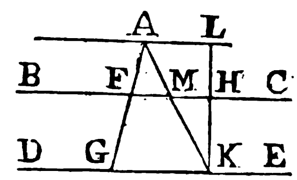


 DE oc-

DE occurrens in F, G, erit AF ad AG, ut HL ad LK. Jungatur enim KA, occurratque ipſi BC in M. Igitur propter parallelas eſt AF ad AG, ut (AM ad AK, hoc eſt ut) HL ad LK, hoc eſt in ratione data.



Manifeſtum autem eſt in caſu quo punctum A requiritur inveniri extra parallelas, rationem datam quam habet AG ducta ſc. ad parallelam remotiorem, ad AF ductam ad reliquam parallelam, debere rationem eſſe majoris ad minorem.

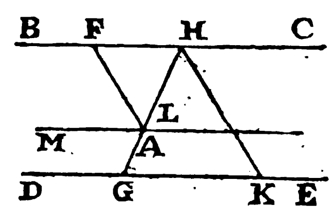


Cas. 2. Quando AF, AG ductae ſint in datis angulis AFC, AGE, et requiritur ut punctum A ſit inter parallelas.

Occurrat AG ipſi BC in H, et quoniam datus eſt angulus AGE, dabitur eidem aequalis AHF; et datus eſt AFH, quare triangulum AHF ſpecie datum eſt, [41. dat.]. data igitur eſt ratio AH ad AF, et ex hypotheſi data eſt ratio AF ad AG; ergo [8. dat.] data eſt ratio AH ad AG; ideoque recta quae per A ducta eſt ipſi BC parallela poſitione dabitur [37. dat.]. tangit propterea punctum A rectam hanc poſitione datam.

Componetur vero ita.

A puncto quovis H in BC ducantur ad reliquam parallelam DE, rectae HG, HK, quarum HG faciat angulum HGE aequalem dato angulo quem ducenda ad DE cum ipſa comprehendere debet; et HK faciat angulum HKD aequalem reliquo dato angulo. et ſit ratio data quam ducenda ad DE habere debet ad ducendam ad BC aequalis rationi LH ad HK, et ſecetur GH in A ita ut GA ſit ad AH, ut LH ad HG; per A vero ducatur AM ipſi BC parallela, Erit haec Locus quaeſitus; hoc eſt ſi a quovis in ipſa puncto A ducantur AF, AG ad parallelas in datis angulis, erit AG ad AF, ut LH ad HK. Ex conſtructione enim eſt AG ad AH, ut LH ad HG; ut



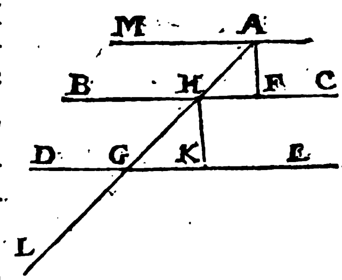
vero

Digitized by Google

vero AH ad AF, ita eſt HG ad HK; Ergo ex aequo eſt AG ad AF, ut LH ad HK, hoc eſt in data ratione.

Cas. 3. Quando punctum A eſt extra parallelas, reliquis ut in caſu 2. manentibus. Occurrat AG alteri parellelae in H, et quoniam datus eſt angulus AGE, dabitur eidem aequalis AHF; et datus eſt AFH, quare triangulum AHF ſpecie datum. data igitur ratio AH ad AF, et ex hypotheſi data eſt ratio AF ad AG; Ergo [8. dat.] data eſt ratio AH ad AG, ideoque quae per A ducta eſt ipſi BC parallela poſitione dabitur, [38. dat.]. Tangit propterea punctum A hanc rectam poſitione datam.

Quoniam vero punctum A eſt extra parallelas, erit AG major AH; quare ratio AG ad AF major erit ratione AH ad AF; hoc eſt ſi a puncto quovis H ducatur ad unam ex parallelis DE rectae HG, HK quarum HG facit angulum HGE aequalem ei quem ducta ad DE, parallelam ſc. a puncto A remotiorem, cum ipſa comprehendere debet, et HK facit angulum HKD aequalem reliquo dato angulo; ratio data quam ducta ad parallelam remotiorem habet ad ductam ad reliquam parallelam major debet eſſe ratione HG ad HK,



Componetur vero ita.

A puncto quovis H in BC ducantur ad reliquam parallelam DE, rectae HG, HK in datis angulis ut jam dictum fuit; et ſit ratio data quam ducta ad parallelam remotiorem habet ad ductam ad reliquam, aequalis rationi LH ad HK quae major debet eſſe ratione HG ad HK, ut oſtenſum fuit. Et producatur GH ad A ita ut GA ſit ad AH, ut LH ad HG; per A vero ducatur AM ipſi BC parallela, erit haec Locus quaeſitus; hoc eſt ſi a quovis, in ipſa puncto A ducantur AF, AG ad parallelas in datis angulis; erit AG ad AF, ut LH ad HK. Ex conſtructione enim eſt AG ad AH, ut LH ad HG, ut vero AH ad AF, ita eſt HG ad HK; ergo ex aequo eſt AG ad AF, ut LH ad HK, hoc eſt in data ratione.

PROP.

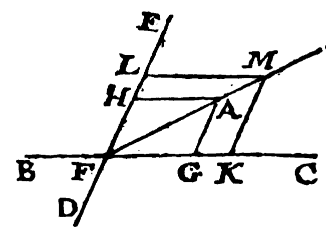
Prop. XXIII.

Si a puncto ad duas poſitione datas rectas lineas, inter ſe convenientes, ducantur duae rectae lineae, in datis angulis, datamque habentes proportionem: tanget punctum rectam lineam poſitione datam.

A puncto A ad datas poſitione rectas BC, DE ſibi mutuo occurrentes in F, ductae ſint AG, AH in datis angulis AGF, AHF, datamque habentes rationem: tanget punctam A rectam poſitione datam.

Cas. 1. Quando ductae AG, AH ſunt poſitione datis DE, BC parallelae.

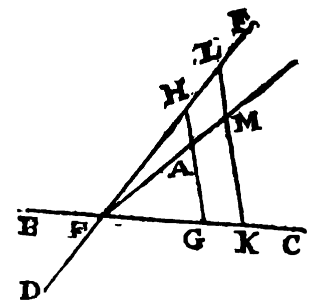
In hoc caſu erit AGFH parallelogrammum, et quoniam data eſt ratio AG ad AH, hoc eſt AG ad GF, datuſque eſt angulus AGF, ſpecie dabitur triangulum AGF, [41. dat.]; quare juncta AF poſitione dabitur [29. dat.]. Compoſitio vero obvia eſt, ſc. a puncto quovis K in BC ducendo rectam ipſi DE parallelam, et in ipſa ſumendo rectam KM quae ad KF datam habeat rationem. Juncta enim MF erit Locus quaeſitus. Nam in eo ſumatur punctum quodvis A, et ductis AG, AH ipſis FE, FC parallelis, Erit AG ad AH ſeu FG, ut KM ad KF, hoc eſt in data ratione. Locus vero in hoc caſu ita aliter ennunciari poteſt, viz.



Si a puncto A ad rectam poſitione datam BC, ducatur AG in angulo dato, datamque habens rationem ad GF abſciſſam ſc. inter ipſam et datum punctum F. Tanget punctum A rectam poſitione datam.

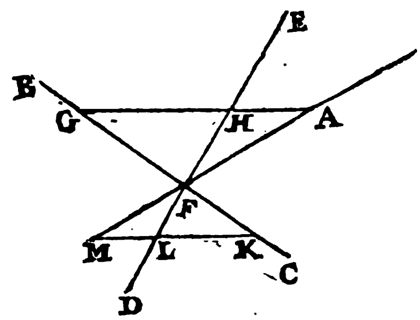
Cas. 2. Quando AG, AH ſunt in recta linea. igitur quoniam data eſt ratio GA ad AH; dabitur ratio GH ad AH; et propter ſpecie datum

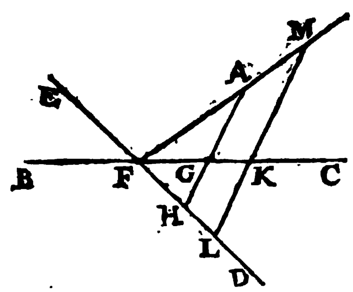
tum triangulum FGH, dabitur ratio FH ad HG; quare [8. dat.] data eſt ratio FH ad HA, datuſque eſt angulus FHA, junctâ igitur AF, ſpecie dabitur triangulum AFH [41. dat.], ideoque datur angulus AFH; et poſitione data eſt FH, punctumque F, ergo poſitione datur FA [29. dat.] quam ſc. tangit punctum A.



Componetur vero ita.

A puncto quovis L in recta DE ad rectam BC ducatur quaevis LK faciens angulum LKF aequalem dato angulo quem ſc. ducta a puncto A cum ipſa comprehendere debet. Et ſi LK occurrat lateribus anguli CFE, hoc eſt ſi angulus CFE una cum dato angulo AGB minor ſit duobus rectis, in ipſa LK ſumatur punctum M quod faciat rationem ſegmenti MK inter M ſc. et rectam FC ad reliquum ſegmentum ML aequalem rationi quam ducta a puncto A ad ipſam BC habere debet ad reliquam ductam. Si vero angulus CFE una cum dato angulo AGB major ſit duobus rectis, hoc eſt ſi recta LK occurrat lateribus anguli ipſi CFE adjacentis, producatur KL ad punctum M, ita ut KM ſit ad ML in data ratione quam ducta ad BC habere debet ad ductam ad DE; et juncta FM in utroque caſu erit Locus quaeſitus; hoc eſt ſi a quovis in ipſa puncto A ducatur recta ipſi LK parallela, occurrens BC in G et DE in H; Erit GA ad AH, ut KM ad ML. Eſt enim propter parallelas AG ad AF, ut KM ad MF; ut vero AF ad AH, ita MF ad ML; Ergo ex aequo eſt AG ad AH, ut KM ad ML.





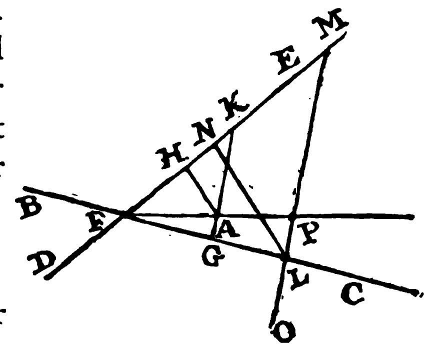
Manifeſtum vero eſt in caſu quo KL occurrit lateribus anguli adjacentis

centis ipſi CFE, ſi ratio data fuerit majoris ad minorem, producendam eſſe KL ad partes puncti L. Si vero fuerit ratio data minoris ad majorem producendam eſſe ad partes puncti K.

Et ſimiliter omnino invenietur Locus intra angulum BFE qui deinceps eſt ipſi EFC.

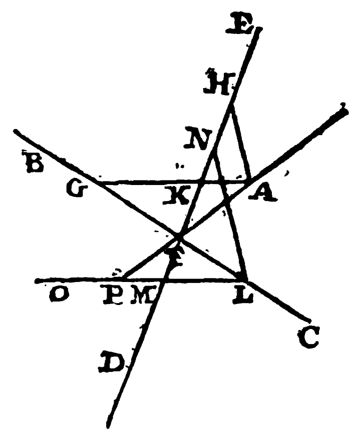
Cas. 3. Quando ductae AG, AH neque parallelae ſunt poſitione datis BC, DE; neque in recta linea.

Occurrat A G utravis ſc. ex ductis, reliquae poſitione datae DE in K. Specie igitur datum eſt triangulum AHK, et quoniam data eſt ratio AG ad A H, ut et ratio A H ad A K, dabitur [8. dat.] ratio AG ad AK; Ergo tangit punctum A rectam poſitione datam per cas. 2. hujus.



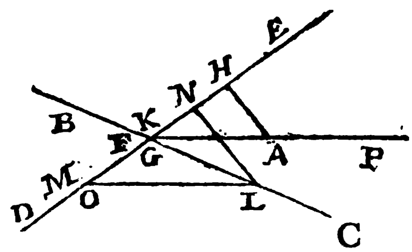
Componetur vero ita.

A puncto quovis L in F C ducantur ad reliquam poſitione datam DE rectae LM, L N datos facientes angulos, cum ipſis BC, DE, quos ſc. ducendae a puncto A cum iiſdem comprehendere debent, et in L M quae cum B C facit angulum aequalem ei quem ducenda a puncto A cum eadem B C comprehendere debet, ſumatur recta O L quae ad L N datam habet rationem quam ducta a puncto A ipſi LM parallela habere debet ad reliquam ductam. Et per cas. 2. ducatur intra illum angulorum EFC, EFB intra quem requiritur punctum A exiſtere, recta FP quae Locus eſt punctorum per quorum quodvis A ſi ad ipſas BC, DE ducatur recta GK ipſi LM parallela, habeat GA ad AK eandem rationem quam habet OL ad LM; Erit FP Locus quaeſitus. Nam ex conſtructione, eſt GA ad AK,



AK, ut OL ad LM; ut vero AK ad AH, ita eſt LM ad LN; ergo ex aequo eſt GA ad AH, ut OL ad LN, hoc eſt in ratione data.

In caſu vero quo recta LM cadit intra angulum qui deinceps eſt ipſi EFC, ſi ratio data aequalis fuerit rationi quam habet LM ad LN, patet rectam FP quae parallela eſt ipſi LM fore Locum quaeſitum. Nam a quovis in ea puncto A ductâ AH parallelâ rectae LN; erit AF ſeu AG ad AH, ut LM ad LN.



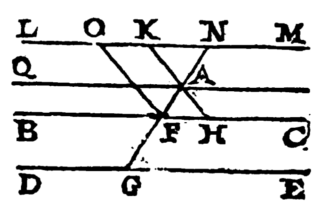
Cor. In parte 2da recta FP quae Locus eſt tranſit per occurſum F poſitione datarum BC, DE.

Prop. XXIV.

Si a puncto ad duas poſitione datas rectas lineas parallelas, ducantur duae rectae lineae, in datis angulis, quarum una ſimul cum ea ad quam altera datam habet rationem data eſt: " vel quarum una major vel minor eſt altera data quam in " ratione:" tanget punctum rectam poſitione datam.

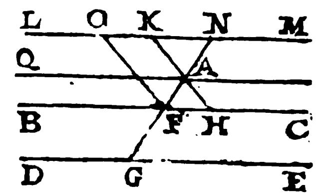
Cas. 1. Quando una rectarum (quae dicatur prima) una cum ea ad quam altera (quae dicatur ſecunda) datam habet rationem, data eſt.

A puncto A ad datas poſitione parallelas BC, DE ductae ſint in datis angulis rectae AG, AH; et ſit AH una cum eâ AK ad quam altera AG datam habet rationem aequalis datae rectae, et ponatur AK in HA producta ad partes A. Quoniam igitur ad poſitione datam BC, in dato angulo, ducta eſt KH quae magnitudine datur, tanget punctum K rectam poſitione datam et ipſi BC parallelam, [Prop. 20. hu-



jus]. Sit ea LM. Igitur a puncto A ad duas rectas parallelas poſitione datas DE, LM ductae ſunt AG, AK in datis angulis datamque inter ſe habentes rationem, et propterea tangit punctum A rectam poſitione datam per Prop. 22. hujus.

Primò autem ſi requiratur ut punctum A ſit extra parallelas poſitione datas, ad partes ipſius BC, cadet LM extra eas ad eaſdem partes; et quoniam punctum A eſt inter parallelas LM, DE, Locus invenietur per Cas. 2. Prop. 22. Poterit autem ratio data quam habere debet AG ad AK talis eſſe quae faciat punctum A cadere inter ipſas BC, DE, unde Locus conſtrui non poterit; invenienda igitur eſt determinatio qua obtinente punctum A ſemper cadat extra parallelas, ſc. inter ipſas BC, LM. ut hoc fiat, occurrat GA ipſis BC, LM in F, N; et ad LM ducatur FO parallela rectae HK. Et quoniam debet GA major eſſe GF, debet propterea ratio GA ad AN major eſſe ratione GF ad FN; ut autem AN ad AK, ita eſt FN ad FO; Ergo ex aequo GA ad AK ratio, major debet eſſe ratione GF ad FO; hoc eſt ratio data quam ſecunda recta AG habet ad eam AK quae ſimul cum prima AH data eſt, major debet eſſe ratione quam ſegmentum GF ſecundae inter parallelas BC, DE, habet ad FO ſeu HK datam ſc. magnitudine rectam. Igitur quando punctum A requiritur eſſe extra parallelas ad partes ipſius BC ad quam ſc. prima recta ducenda eſt, Propoſitio

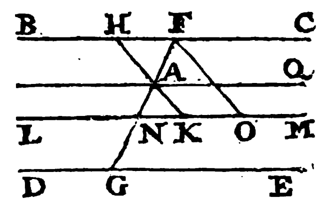


Componetur ita.

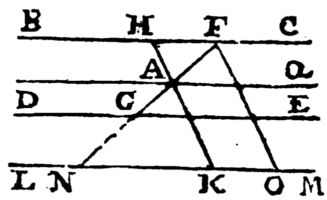
A puncto quovis F in BC ducatur recta FO parallela ei quae a puncto A ad eandem BC ducenda eſt; et in ipſa ſumatur, extra parallelas, FO aequalis rectae datae; et per O ducatur LM parallela ipſi BC, ad DE vero ducatur FG parallela ei quae a puncto A ad eandem DE ducenda eſt. Et per Cas. 2. Prop. 22. ducatur recta AQ intra parallelas DE, LM, quae Locus eſt punctorum a quorum quovis A ſi ducantur ad DE, LM rectae AG, AK ipſis FG, FO parallelae, habeat AG ad AK rationem datae rationi aequalem, quae ut oſtenſum fuit, major

jor debet eſſe ratione GF ad FO; erit AQ Locus quaeſitus. Nam quoniam ratio AG ad AK major eſt ratione GF ad FO; ut vero AK ad AN, ita eſt FO ad FN; erit ex aequo ratio AG ad AN major ratione GF ad FN, quare GA major eſt GF, et cadit punctum A inter ipſas BC, LM. Eſt autem ex conſtructione GA ad AK in data ratione, productâ igitur KA ad BC in H, Erit AH una cum AK ad quam AG datam habet rationem, aequalis datae rectae FO.

Secundo, Quando requiritur punctum A eſſe inter parallelas BC, DE, cadet LM ad partes ipſius BC ad quas eſt DE, vel inter parallelas, vel in ipſa DE vel extra ipſas. Et ſi quidem cadat inter parallelas, quoniam eſt G A minor GF erit ratio GA ad AN major ratione GF ad FN; unde prorſus ut in praemiſſis, oſtendetur rationem quam habet AG ad AK majorem debere eſſe ratione GF ad FO ſeu HK; et inventa recta AQ per Cas. 3. Prop. 22. compoſitio fiet omnino ut praecedens, ſi ponatur FO ſc. ad partes ipſius DE.

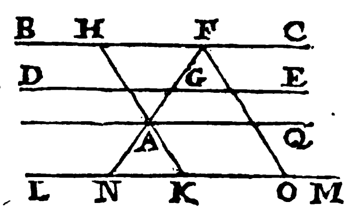


Si autem recta LM cadat extra parallelas, quoniam eſt GA minor GF, et etiam minor AN, Erit ratio GA ad AN minor ratione GF ad FN; unde oſtendetur ratio GA ad AK minor ratione GF ad FO ſeu HK. Et inventa AQ per Cas. 3. Prop. 22. caetera fient omnino ut in praecedentibus; poſitâ tamen FO verſus partes ipſius DE.



Quando autem LM coincidit cum DE manifeſtum eſt rationem GA ad AK eandem eſſe cum ratione GF ad FO.

Tertio, Quando requiritur ut punctum A cadat extra parallelas ad partes ipſius DE nulla determinatione opus erit niſi quod data recta HK major debet eſſe ſegmento ipſius inter parallelas BC, DE. et compoſitio fiet ut in praemiſſis ſc. per Cas. 2. Prop. 22.

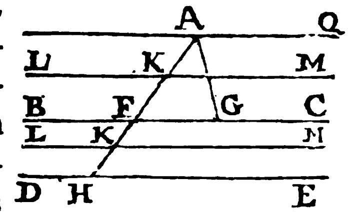


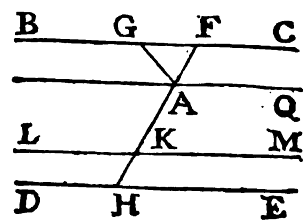
Digitized by Google

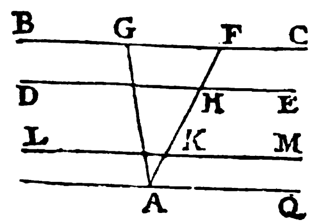
Cas. 2. Quando una ductarum major eſt altera data quam in ratione.

A puncto A ad datas poſitione parallelas BC, DE ductae ſint in datis angulis rectae AH, AG quarum AH major eſt AG datâ quam in ratione; tanget punctum A rectam poſitione datam.

Ab AH auferatur data recta HK; datur igitur [11. def. dat.] ratio reliquae KA ad ipſam AG; et propter DE poſitione et HK magnitudine datam, angulumque datum KHE, tanget punctum K rectam poſitione datam ipſi DE parallelam [Prop. 20. hujus]. Sit ea LM; quoniam igitur a puncto A ad parallelas poſitione datas LM, BC ductae ſunt AK, AG in datis angulis, datamque habentes rationem, tanget punctum A rectam poſitione datam, per Prop. 22. hujus. Et ſi punctum A ponatur eſſe extra parallelas BC, DE ad partes ipſius BC, poterit recta LM cadere vel intra, vel extra ipſas ad partes rectae BC, prout recta data HK minor vel major eſt ipſa HF, ſegmento ſc. inter parallelas BC, DE. In primo caſu debet ratio data quam habet AK ad AG major eſſe ratione AF ad AG; in altero vero minor debet eſſe eâdem; ut patet ex cas. 3. Prop. 22. hujus. Si vero punctum A ponatur cadere inter parallelas, BC, DE, idem cadet inter ipſas BC, LM, et nulla in hoc caſu determinatio erit, niſi quod data HK minor debet eſſe ipſa HF. Denique ſi ponatur A cadere extra parallelas ad partes rectae DE, idem cadet extra ipſas BC, LM, et propterea ratio data AK ad AG minor debet eſſe ratione AF ad AG per praedictum cas. 3.





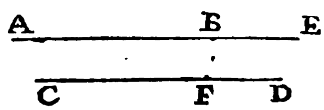


Componetur vero ope Prop. 22. ducendo ſc. a quovis in DE puncto rectam HF quae faciat angulum FHE aequalem dato angulo quem

ducenda

ducenda a puncto A cum DE comprehendere debet; et ablata data recta HK, ducendo LKM ipſi DE parallelam; tum inveniendo rectam AQ Locum ſc. punctorum a quorum quovis A rectae AK, AG ad ipſas LM, BC ductae in datis angulis, datam habeant rationem; Erit enim AQ Locus quaeſitus. Nam habet AK ad AG datam rationem, et data eſt HK; quare AH major eſt AG data quam in ratione.

In Cas. 3. Quando ſc. una ductarum minor eſt altera data quam in ratione, ſimiliter invenietur Locus, vel reduci poterit hic caſus ad 2^{dum}; ſi enim magnitudo AB minor fuerit alia CD data quam in ratione; et viciſſim haec major erit illâ data quam in ratione. Etenim ad AB addatur data BE; dabitur igitur ratio AE ad CD [12. def. dat.]; fiat autem ut AE ad CD, ita BE ad quartam DF; datur igitur ratio BE ad DF, et propter datam BE dabitur DF [2. dat.]. Et quoniam eſt tota CD ad totam AE, ut ablata DF ad ablatam BE, Erit [19. 5.] CF ad AB, ut CD ad AE, hoc eſt in ratione data; et datur FD; quare CD major eſt ipſa AB data quam in ratione, [11. def. dat.].



Prop. XXV.

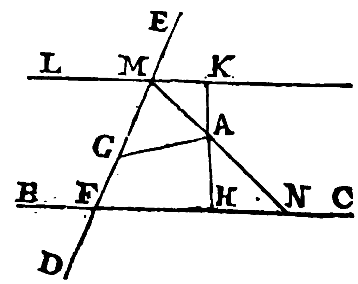
Si a puncto ad duas poſitione datas rectas lineas, inter ſe convenientes, ducantur duae rectae lineae, in datis angulis, quarum una ſimul cum ea ad quam altera datam habet rationem, data eſt; "vel quarum una major vel minor eſt altera data quam in ratione:" tanget punctum rectam poſitione datam.

Cas. 1. Quando una rectarum ſimul cum eâ ad quam altera datam habet rationem, data eſt.

A puncto

Digitized by Google

A puncto A ad duas poſitione datas BC, DE ſibi mutuo occurrentes in F, ductae ſint in datis angulis rectae AG, AH; et ſit AH una cum ea AK ad quam altera AG datam habet rationem, aequalis datae rectae.



Quoniam igitur poſitione datur FC et magnitudine HK anguluſque FHK, tanget punctum K rectam poſitione datam [20. hujus], ſit ea LK quae parallela erit ipſi FC, rectae vero FE occurrat in M. et quoniam a puncto A ad duas poſitione datas FE, LM ductae ſunt AG, AK in datis angulis datamque habentes rationem, tanget punctum A rectam poſitione datam per punctum M tranſeuntem [per Prop. 23. hujus et Cor. ejuſdem].

Componetur vero ita.

Ducatur a quovis in BC puncto H recta HK aequalis rectae datae, in angulo dato quem ſc. comprehendere debet ducta a puncto A cum ipſa BC; et per K ducatur LMK ipſi BC parallela. ope vero Prop. 23. ducatur, intra angulum FML, vel intra eum qui ipſi deinceps eſt, prout inveniendum eſt punctum A intra angulum EFB vel EFC, recta MN quae Locus eſt punctorum a quorum quovis A ductae ad FE, LM rectae AG, AK in datis angulis, datam habeant rationem. Erit hujus ſegmentum inter parallelas, viz. recta MN Locus quaeſitus. Nam ductis a quovis in ea puncto A rectis AH, AG ad ipſas FC, FE in datis angulis et productâ AH ad LM in K, habebit AG ad AK datam rationem; AH autem ſimul cum AK aequalis eſt rectae datae HK.

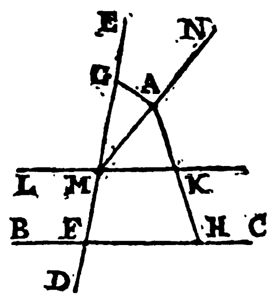
Cas. 2. Quando una ductarum AH major aut minor eſt alterâ AG, data quam in ratione.

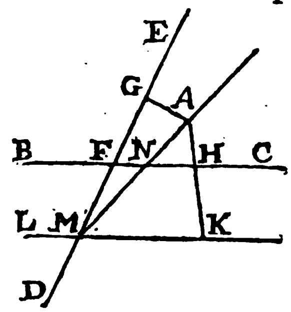
Igitur ablatâ vel additâ datâ HK, reliqua aut ſumma AK datam habebit rationem ad AG [11. aut 12. def. dat.], et ut in praecedente oſtendetur punctum K tangere rectam LM poſitione datam et ipſi BC parallelam; et quoniam datur ratio AK ad AG quae ad poſitione datas LM, ME in datis angulis ducuntur, tanget punctum A rectam poſitione

one

Digitized by Google

one datam MN quae ope Prop. 23. invenietur; a quovis in ipſa puncto A ducantur ad FC, FE in datis angulis rectae AH, AG quarum AH occurrat LM in K. et quoniam ex conſtructione AK datam habet rationem ad AG, et data eſt HK; erit AH major vel minor ipſâ AG data quam in ratione.

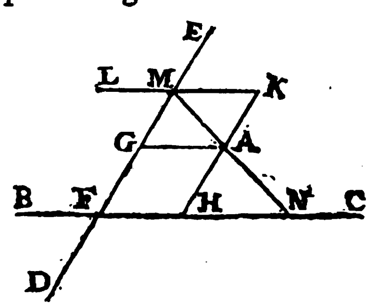


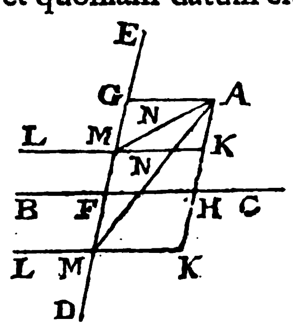


In caſu autem quo AH, AG parallelae ſunt poſitione datis BC, DE; Locus poterit ita aliter enunciari, viz.

Si a puncto A ad rectam poſitione datam BC in qua datum eſt punctum F, ducatur AH in dato angulo, fueritque una ipſarum AH, HF ſimul cum ea ad quam altera datam habet rationem, data; vel ſi una ipſarum major aut minor fuerit altera data quam in ratione; tanget punctum A rectam poſitione datam.

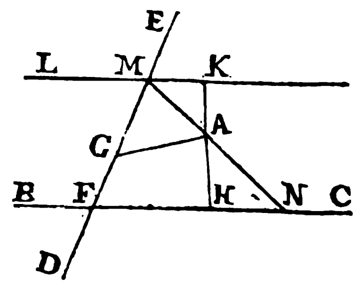
Compleatur enim parallelogrammum AHFG, et quoniam datum eſt punctum F in recta poſitione data BC, anguluſque CFG datus eſt, poſitione dabitur FG [29. dat.], et aequales ſunt AG, FH; igitur a puncto A ad poſitione datas BC, DE; ductae ſunt AH, AG in datis angulis, et una ipſarum, puta AH, una cum ea ad quam altera datam habet rationem, data eſt; vel eſt AH major aut minor AG data, quam in ratione; quare hic Locus idem eſt cum praedicto caſu hujus Propoſitionis.





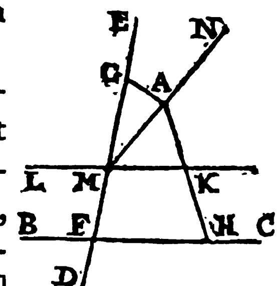
Cor.

Coroll. I. Hinc ſi a puncto A ad duas poſitione datas rectas BC, DE ducantur rectae AG, AH in datis angulis, fuerintque rectangula ab ipſis et datis rectis *a*, *b* contenta ſimul data; tanget punctum A rectam poſitione datam. Sit rectangulum contentum AG, *a*, una cum contento AH, *b*, aequale rectangulo HK, *b*, producta ſc. HA ad K; datur igitur rectangulum HK, *b*; et datur recta *b*, quare HK magnitudine datur. et ablato communi ſpatio AH, *b*; erit reliquum contentum ſc. AG, *a*, aequale reliquo AK, *b*; igitur eſt AG ad AK, ut *b* ad *a*, hoc eſt in ratione data. Ergo quoniam a puncto A ad duas poſitione datas BC, DE in datis angulis ductae ſunt rectae AH, AG, et una ipſarum AH ſimul cum ea AK ad quam altera AG datam habet rationem, data eſt. Tanget punctum A rectam poſitione datam per hanc Propoſitionem.



Coroll. II. Et ſi unum ex rectangulis praedictis ſc. AH, *b*, majus fuerit altero AG, *a*, ſpatio dato; tanget punctum A rectam poſitione datam.

Sit ſpatium datum aequale contento HK, *b*, ablata ſc. HK ab ipſa HA, data igitur erit HK. Et quoniam ex hypotheſi rectangulum AH, *b*, aequale eſt ipſis AG, *a*; HK, *b*; ablato communi HK, *b*; erit AK, *b*, aequale ipſi AG, *a*; Ergo datur ratio AK ad AG, et data eſt KH, quare [def. 11. dat.] eſt AH major AG data quam in ratione; et propterea tangit punctum A rectam poſitione datam per hanc Propoſitionem. Compoſitio vero horum eadem eſt cum ea Propoſitionis, ut patet.



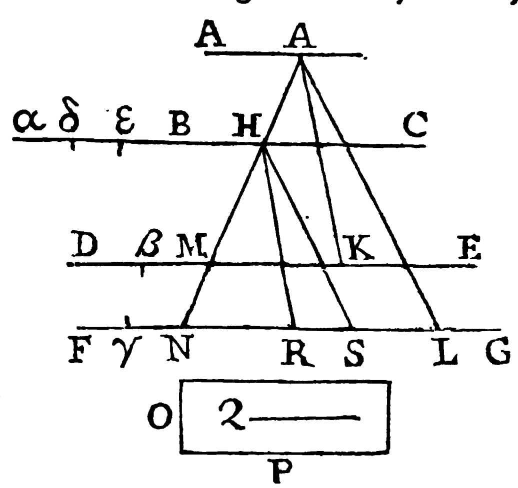
Prop.

Prop. XXVI.

Si ſint tres rectae lineae parallelae poſitione datae, et ad ipſas a quodam puncto ducantur rectae lineae in datis angulis; ſit vero rectangulum contentum data recta et una ex ductis, ſimul cum eo quod continetur data et alia ducta, aequale rectangulo contento data et reliqua ducta. Tanget punctum rectam poſitione datam.

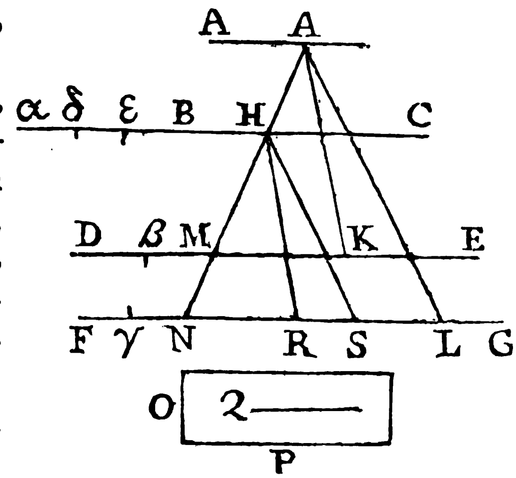
Cas. 1. Quando punctum a quo ducuntur rectae eſt extra parallelas, ad partes ejus extremae parallelae ad quam ducta comprehendit cum recta data rectangulum aequale duobus reliquis rectangulis. dicatur autem haec extrema prima, reliqua vero extrema dicatur ſecunda.

A puncto A ad tres poſitione datas rectas inter ſe parallelas, BC, DE, FG ductae ſint AH, AK, AL in datis angulis AHB, AKD, ALF, quarum AH occurrat ipſis DE, FG, in M, N, punctis; ſitque rectangulum contentum AH et data magnitudine recta $H\alpha$ aequale contento AK, et data magnitudine recta $M\beta$, ſimul cum contento AL et data magnitudine $N\gamma$. Tanget punctum A rectam poſitione datam.



Quoniam enim ſpecie datum eſt triangulum AKM, dabitur ratio AM ad AK; in hac ratione ſit $M\beta$ ad $\alpha\delta$, et propter datam $M\beta$ dabitur $\alpha\delta$; et rectangulum contentum ipſis AM, $\alpha\delta$ aequale erit contento AK, $M\beta$. Similiter quoniam data eſt ratio AN ad AL, ſi in hac ratione fiat $N\gamma$ ad $\delta\varepsilon$, dabitur $\delta\varepsilon$; et rectangulum AN, $\delta\varepsilon$ aequale erit ipſi AL, $N\gamma$. Ex hypotheſi au-

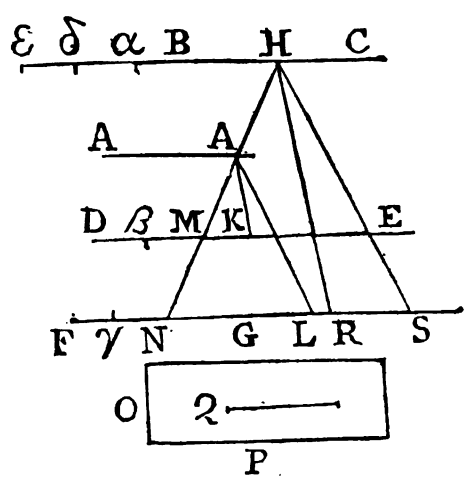
tem rectangulum AHα aequale eſt ipſis AK, Mβ; AL, Nγ ſimul; quare idem AHα aequale erit (rectangulis AM, $\alpha\delta$; AN,$\delta\epsilon$ ſimul; hoc eſt [1. 2.] ipſis AH,$\alpha\delta$; HM, $\alpha\delta$; AH, $\delta\epsilon$; HN, $\delta\epsilon$; hoc eſt [1. 2.]) rectangulis AH, $\alpha\epsilon$; HM, $\alpha\delta$; HN, $\delta\epsilon$. et ablato communi rectangulo AH, $\alpha\epsilon$; erit reliquum AHϵ aequale reliquo ipſis ſc. HM, $\alpha\delta$; HN, $\delta\epsilon$. datae autem ſunt HM, HN magnitudine [32. dat.], et datae ſunt rectae $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$; quare data ſunt rectangula HM, $\alpha\delta$; HN, $\delta\epsilon$; ipſiſque aequale rectangulum AHϵ datum erit. et data eſt magnitudine recta Hϵ, ergo et AH magnitudine data eſt. poſitione autem data eſt BC, datuſque eſt angulus AHB; ergo tangit punctum A rectam poſitione datam per Prop. 20. hujus.



Componetur vero ita.

A puncto quovis H in recta BC, ducantur ad FG rectae HN, HR, HS, quarum HN faciat angulum HNF aequalem dato angulo quem ducenda a puncto A comprehendere debet cum ipſa BC; HR vero faciat angulum HRF aequalem ei quem ducenda a puncto A comprehendere debet cum DE; et HS faciat angulum HSF aequalem reliquo dato angulo quem ſc. ducenda a puncto A cum ipſa FG comprehendere debet. Et ſint Hα, Mβ, Nγ aequales datis rectis quae latera debent eſſe rectangulorum quorum reliqua latera ſunt rectae ad ipſas BC, DE, FG ducendae. Ut autem NH ad HR, ita fiat Mβ ad $\alpha\delta$, quae ponatur in recta αH a puncto α verſus H. Et ut NH ad HS, ita fiat Nγ ad $\delta\epsilon$, quae ponatur a puncto δ verſus H. Et quoniam oſtenſum fuit rectangulum AHα aequale ipſis AH, $\alpha\epsilon$; HM, $\alpha\delta$; HN, $\delta\epsilon$; erit AHα majus ipſa AH, $\alpha\epsilon$. quare debet Hα major eſſe $\alpha\epsilon$; et propterea rectangulum NHα majus debet eſſe (ipſo NH, $\alpha\epsilon$, hoc eſt ipſis

ipſis NH, αδ; NH, δε; hoc eſt propter praedictas proportiones) rectangulis HR, Mβ; HS, Nγ; quae eſt Determinatio hujus caſus. Sit igitur rectangulum NHα majus ipſis HR, Mβ; HS, Nγ; et retrogradiendo oſtendetur Hα major αε. rectangulis autem HM, αδ; HN, δε ſimul, aequale fiat rectangulum contentum rectis O, P [45. 1.]. Ut vero Hε ad O, ita fiat P ad quartam Q, et producatur NH ad A ita ut AH aequalis ſit rectae Q; per A vero ducatur recta AA parallela ipſi BC: Erit haec Locus quaeſitus, hoc eſt ſi a quovis in ipſa puncto A ducantur ad BC, DE, FG, rectae AH, AK, AL in datis angulis, hoc eſt parallelae ipſis HN, HR, HS; erit rectangulum AHα aequale ipſis AK, Mβ; AL, Nγ; ſimul. Eſt enim propter parallelas, AM ad AK, ut (NH ad HR, hoc eſt ex conſtructione, ut) Mβ ad αδ. quare rectangulum AM, αδ aequale eſt ipſi AK, Mβ. Similiter eſt AN ad AL, ut (NH ad HS, hoc eſt ut) Nγ ad δε; quare rectangulum AN, δε aequale eſt ipſi AL, Nγ. Eſt autem ex conſtructione Hε ad O, ut P ad AH; ergo rectangulum AHε aequale eſt contento ipſis O, P, hoc eſt ex conſtructione rectangulis HM, αδ; HN, δε; addatur commune rectangulum AH, αε ſeu rectangula AH, αδ; AH, δε; et rectangulum AH α aequale erit (ipſis AH, αδ; AH, δε; HM, αδ; HN, δε; hoc eſt [1. 2.] ipſis AM, αδ; AN, δε; hoc eſt ut jam oſtenſum) rectangulis AK, Mβ; AL, Nγ.

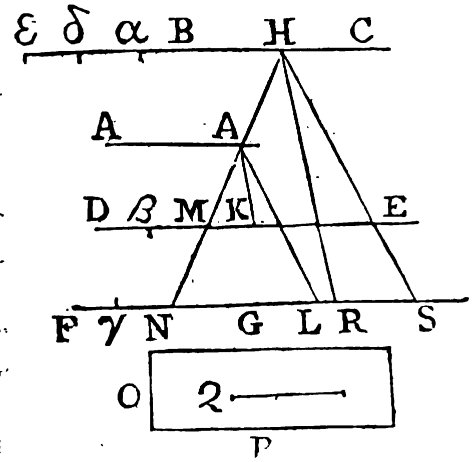


Cas. 2. Quando punctum A cadit inter extremam primam et mediam parallelam.

Sit punctum A inter parallelas BC, DE, reliquis ut in praecedente caſu manentibus. Et eodem modo quo in eo ſumptis rectis αδ, δε, etiam ut ibi oſtendetur rectangulum AHα aequale ipſis AM, αδ; AN, δε ſimul; additoque communi rectangulo AH, αε; erit rectangulum AHε aequale (ipſis AH, αδ;

AH, δε; AM, αδ; AN, δε; hoc eſt) ipſis HM, αδ; HN, δε; et dantur HM, HN, αδ, δε, Hε; quare datur AH. Et punctum A tanget rectam poſitione datam ut in praecedente caſu oſtenſum.

Ductis vero HN, HR, HS, et inventis rectis αδ, δε, ut in praecedente compoſitione, ponantur ipſae a puncto α in recta Hα producta; et quoniam punctum A ex hypotheſi eſt inter parallelas BC, DE, neceſſe eſt ut MH major ſit AH; quare rectangulum MHε majus debet eſſe (ipſo AHε, hoc eſt) ipſis HM, αδ; HN, δε. et ablato communi rectangulo MH, αε; ſeu MH, αδ una cum MH, δε; debet reliquum MHα majus eſſe reliquo MN, δε. Ergo debet ratio MH ad MN major eſſe ratione (δε ad Hα, hoc eſt ratione rectanguli NH, δε ad ipſum NHα, hoc eſt) ratione rectanguli HS, Nγ ad ipſum NHα, quia ſc. eſt NH ad HS, ut Nγ ad δε. Sit igitur ratio quam habet MH ad MN major ratione quam habet rectangulum HS, Nγ ad ipſum NHα; rectanguliſque HM, αδ; HN, δε ſimul aequale fiat contentum rectis O, P; et ut recta Hε ad O, ita fiat P ad quartam Q, et ponatur in recta HN a puncto H recta HA aequalis ipſi Q. Erit igitur rectangulum AHε aequale ipſi O, P hoc eſt ipſis HM, αδ; HN, δε ſimul. Et quoniam ratio MH ad MN major eſt (ratione rectanguli HS, Nγ ad ipſum NHα, hoc eſt ratione NH, δε ad NHα, hoc eſt) ratione δε ad Hα, erit rectangulum MHα majus ipſo MN, δε. addatur commune MH, αε; et rectangulum MHε majus erit (rectangulis MH, αε; MN, δε; hoc eſt ipſis MH, αδ; HN, δε; hoc eſt) ipſo AHε. quare MH major eſt AH, et punctum A cadet inter rectas BC, DE. per ipſum ducatur AA parallela ipſi BC; erit haec Locus quaeſitus. Ducantur enim a quovis in ipſa puncto A rectae AH, AK, AL ut in

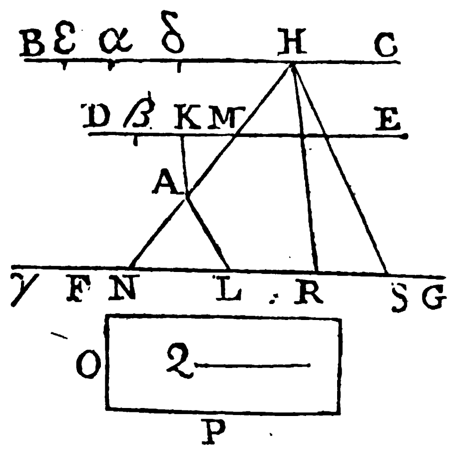


praecedente

praecedente caſu. Et quoniam rectangulum AHϵ aequale eſt ipſis HM, $\alpha\delta$; HN, $\delta\epsilon$; ablato communi AH, $\alpha\epsilon$; erit rectangulum AHα aequale ipſis (AM, $\alpha\delta$; AN, $\delta\epsilon$; hoc eſt ipſis) AK, Mβ; AL, Nγ.

Cas. 3. Quando punctum A eſt inter mediam parallelam et extremam ſecundam.

Sit jam punctum A inter parallelas DE, FG, reliquis ut in primo caſu manentibus; et, ut in eo, ſumptis rectis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$, etiam ut ibi oſtendetur rectangulum AHα aequale ipſis AM, $\alpha\delta$; AN, $\delta\epsilon$; additiſque rectangulis NA, Hα; NA, $\alpha\delta$; erit rectangulum NHα ſimul cum NA, $\alpha\delta$ aequale ipſis NM, $\alpha\delta$; NA, Hα; NA, $\delta\epsilon$. Rectangula vero NHα; NM, $\alpha\delta$; vel ſunt inaequalia, vel inter ſe aequalia. Primo ſint inaequalia, exceſſus igitur rectanguli NA, Hα una cum ipſo NA, $\delta\epsilon$ et ipſius NA, $\alpha\delta$ aequalis eſt exceſſui rectanguli NHα ipſiuſque NM, $\alpha\delta$; hoc eſt ſpatio dato. Et datae ſunt rectae Hα, $\delta\epsilon$ et $\alpha\delta$; ergo et AN data eſt; poſitione autem data eſt FG, datuſque eſt angulus ANF; ergo tangit punctum A rectam poſitione datam per Prop. 20. hujus.



Quoniam vero rectangulum NHα una cum NA, $\alpha\delta$ aequale eſt ipſis NM, $\alpha\delta$; NA, Hα; NA, $\delta\epsilon$; ſi rectangulum NHα majus aut minus fuerit ipſo NM, $\alpha\delta$; erit rectangulum NA, Hα una cum NA, $\delta\epsilon$; majus aut minus ipſo NA, $\alpha\delta$: ideoque recta Hα una cum $\delta\epsilon$ major aut minor debet eſſe ipſâ $\alpha\delta$. Et quoniam, ex iis quae data ſunt in Propoſitione, hoc non ſemper obtineat, Locus non ſemper conſtrui poterit; inquirendum igitur eſt ex quibus conditionibus magnitudinum datarum utrumlibet ex iſtis duobus neceſſario eveniet.

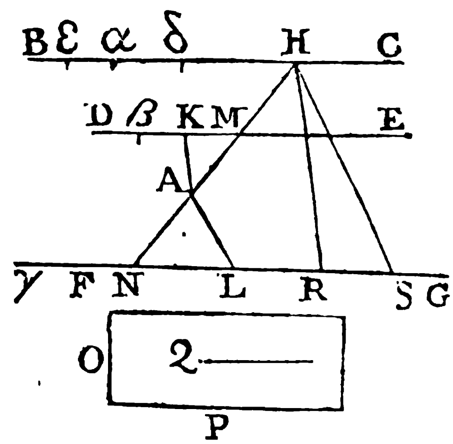
Ducantur igitur rectae HN, HR, HS et inveniantur $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ut in compoſitione primi caſus oſtenſum fuit, quarum $\alpha\delta$ ponatur in recta

αH

αH a puncto α verſus partes puncti H; δε vero ponatur a puncto δ verſus contrarias partes.

Et primo ſit rectangulum NHα majus ipſo NM, αδ; ergo ratio NH ad NM major erit ratione (αδ ad Hα, hoc eſt ratione rectanguli NH, αδ ad ipſum NHα, hoc eſt ratione) rectanguli HR, Mβ * ad NHα.

Prima igitur hypotheſis magnitudinum datarum ſit haec, viz. rationem NH ad NM majorem eſſe ratione rectanguli HR, Mβ ad ipſum NHα;
A et retrogradiendo oſtendetur rectangulum NHα majus ipſo NM, αδ; ideoque, ut prius dictum, rectangulum NA, Hα una cum NA, δε majus erit ipſo NA, αδ. igitur neceſſe eſt ut recta Hα una cum δε major ſit ipſâ αδ, quare rectangulum NHα una cum NH, δε majus debet eſſe rectangulo NH, αδ; hoc eſt rectangulum NHα una cum ipſo HS, Nγ † majus debet eſſe rectangulo HR, Mβ. Et ſi hoc ultimum
B ponatur, retrogradiendo oſtendetur recta Hα una cum δε major ipſâ αδ.



Praeterea quoniam requiritur ut punctum A ſit inter parallelas DE, FG, debet recta NM major eſſe ipſâ NA. Oſtenſum autem fuit rectangulum NHα una cum NA, αδ aequale rectangulis (NM, αδ; NA, Hα; NA, δε; hoc eſt ipſis) NM, αδ; NA, αδ; NA, Hε; quia ſc. Hα una cum δε aequalis eſt ipſis αδ, Hε ſimul. et ablato communi NA, αδ; erit NHα aequale ipſis NM, αδ; NA, Hε. Et quoniam NM major eſt NA, erit rectangulum NM, αδ una cum NM, Hε majus (rectangulis NM, αδ; NA, Hε ſimul, hoc eſt) ipſo NHα. quare, propter αδ, Hε ſimul aequales ipſis Hα, δε, erit rectangulum NM, Hα una cum NM, δε majus ipſo NHα; et ablato

* quia ſc. eſt NH ad HR, ut Mβ ad αδ.
† quia eſt NH ad HS, ut Nγ ad δε.

communi

communi NM, Hα, erit NM, δε majus ipſo MHα. Ergo ratio NM ad MH major debet eſſe ratione (Hα ad δε, hoc eſt ratione rectanguli NHα ad ipſum NH, δε; hoc eſt ratione) rectanguli NHα ad rectangulum HS, Nγ. Et contra, ſi ratio NM ad MH major fuerit ratione re- C
ctanguli NHα ad ipſum HS, Nγ, retrogradiendo oſtendetur rectangulum NM, δε majus ipſo MHα; additoque communi NM, Hα, erit NM, Hα una cum NM, δε majus (NHα, hoc eſt) ipſis NM, αδ; NA, Hε. quare et NM, αδ una cum NM, Hε majus erit ipſis NM, αδ; NA, Hε. et recta NM propterea major erit ipſa NA.

In prima igitur hypotheſi in qua ſc. ratio NH ad NM major eſt ratione rectanguli HR, Mβ ad ipſum NHα, neceſſe quoque eſt ut rectangulum NHα, una cum HS, Nγ majus ſit rectangulo HR, Mβ; et ut ratio NM ad MH major ſit ratione rectanguli NHα ad ipſum HS, Nγ.

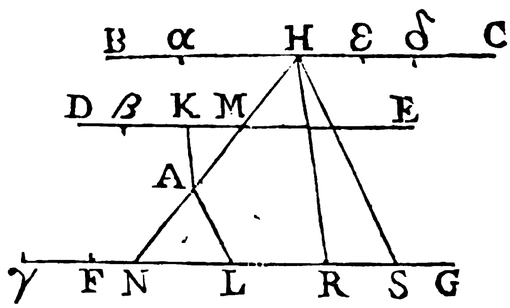
Ultima vero haec conditio ſufficit determinationi; nam ex ea et hypotheſi, altera conditio neceſſario ſequitur. Quoniam enim ratio NM ad D
MH major eſt ratione rectanguli NHα ad ipſum HS, Nγ; erit ratio HS, Nγ ad NHα major ratione MH ad NM. Et componendo erit ratio rectanguli NHα una cum ipſo HS, Nγ ad NHα major ratione NH ad NM. ratio autem NH ad NM ex hypotheſi major eſt ratione rectanguli HR, Mβ ad ipſum NHα; multo igitur ratio rectanguli NHα una cum HS, Nγ ad NHα major erit ratione rectanguli HR, Mβ ad idem NHα. Ergo rectangulum NHα una cum HS, Nγ majus eſt ipſo HR, Mβ; quae fuit altera conditio. Ex hac autem et hypotheſi non ſequitur ſecunda conditio, nec ex duabus conditionibus ſequitur hypotheſis.

Secundo ſit rectangulum NHα minus ipſo NM, αδ; et ſimiliter oſtendetur debere rationem NH ad NM minorem eſſe ratione rectanguli HR, Mβ ad ipſum NHα.

Secunda

Digitized by Google

Secunda igitur hypotheſis ſit haec; rationem NH ad NM minorem eſſe ratione rectanguli HR, $M\beta$ ad ipſum $NH\alpha$; et retrogradiendo oſtendetur rectangulum $NH\alpha$ minus eſſe ipſo NM, $\alpha\delta$. Igitur quoniam oſtenſum fuit rectangulum $NH\alpha$ una cum ipſo NA, $\alpha\delta$ aequale ipſis NM, $\alpha\delta$; NA, $H\alpha$; NA, $\delta\varepsilon$; erit rectangulum NA, $H\alpha$ una cum NA, $\delta\varepsilon$ minus ipſo NA, $\alpha\delta$. Ergo recta $H\alpha$ una cum $\delta\varepsilon$ minor debet eſſe ipſâ $\alpha\delta$. quare rectangulum $NH\alpha$ una cum NH, $\delta\varepsilon$ minus debet eſſe rectangulo NH, $\alpha\delta$; hoc eſt rectangulum $NH\alpha$ una cum HS, $N\gamma$ minus debet eſſe rectangulo HR, $M\beta$. Et ſi hoc ultimum ponatur, retrogradiendo oſtendetur recta $H\alpha$ una cum $\delta\varepsilon$ minor ipſa $\alpha\delta$.



Praeterea requiritur ut recta NM major ſit ipſa NA. eſt autem rectangulum $NH\alpha$ una cum NA, $\alpha\delta$ aequale ipſis NM, $\alpha\delta$; NA, $H\alpha$; NA, $\delta\varepsilon$; et recta $\alpha\delta$ in hoc caſu aequalis eſt ipſis αH, $H\varepsilon$, $\varepsilon\delta$ ſimul; ablatis igitur utrinque rectangulis NA, $H\alpha$; NA, $\delta\varepsilon$; erit $NH\alpha$ una cum ipſo NA, $H\varepsilon$ aequale rectangulo NM, $\alpha\delta$. Et quoniam NM major eſt ipſa NA, erit rectangulum $NH\alpha$ una cum NM, $H\varepsilon$ majus (eodem $NH\alpha$ una cum ipſo NA, $H\varepsilon$ hoc eſt) rectangulo NM, $\alpha\delta$; et ablatis utrinque rectangulis NM, $H\alpha$; NM, $H\varepsilon$; erit rectangulum $MH\alpha$ majus ipſo NM, $\delta\varepsilon$. Ergo ratio NM ad MH minor eſt ratione ($H\alpha$ ad $\delta\varepsilon$ hoc eſt ratione rectanguli $NH\alpha$ ad ipſum NH, $\delta\varepsilon$; hoc eſt ratione) rectanguli $NH\alpha$ ad rectangulum HS, $N\gamma$. Et contra, ſi ratio NM ad MH minor fuerit ratione $NH\alpha$ rectanguli ad ipſum HS, $N\gamma$; retrogradiendo oſtendetur rectangulum $MH\alpha$ majus ipſo NM, $\delta\varepsilon$; et recta NM major NA.

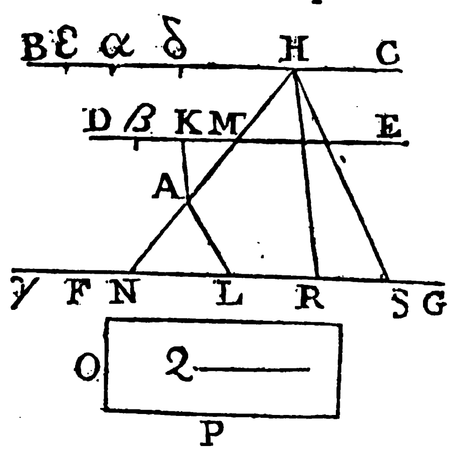
Si igitur ratio NH ad NM minor ſit ratione rectanguli HR, $M\beta$ ad ipſum $NH\alpha$, neceſſe quoque eſt ut rectangulum $NH\alpha$ una cum HS, $N\gamma$ minus ſit ipſo HR, $M\beta$; et ut ratio NM ad MH minor ſit ratione

rectanguli

rectanguli NHα ad ipſum HS, Nγ. Ultima vero haec conditio determinationi ſufficit, ex ea enim et hypotheſi altera neceſſario ſequetur; quod ſimiliter ut in praecedente oſtendetur.

Hiſce determinationibus praemiſſis, componetur caſus tertius in duabus praedictis hypotheſibus ita.

Ductis HN, HR, HS; et inventis poſitiſque rectis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ut dictum fuit; Primo ſit ratio rectae NH ad NM major ratione rectanguli HR, Mβ ad ipſum N Hα; et ſimul ſit ratio NM ad MH major ratione rectanguli NHα ad ipſum HS, Nγ. Unde, ut oſtenſum * fuit, rectangulum NHα una cum HS, Nγ majus erit ipſo HR, Mβ; et propterea erit † recta Hα una cum $\delta\epsilon$ major ipſa $\alpha\delta$. Et quoniam ratio NH ad NM major eſt ratione rectanguli HR, Mβ, ad ipſum NHα, erit * rectangulum NHα majus ipſo NM, $\alpha\delta$. Ipſorum exceſſui aequale inveniatur rectangulum contentum rectis O,P; hoc eſt ſit rectangulum NHα aequale ipſis NM, $\alpha\delta$; O, P ſimul. Et fiat ut recta Hϵ ad rectam O, ita P ad quartam Q; et in recta NH ponatur a puncto N verſus H recta NA ipſi Q aequalis. Erit igitur rectangulum NA, Hϵ aequale ipſi O, P. quare rectangulum NM, $\alpha\delta$ ſimul cum O, P, hoc eſt rectangulum NHα aequale erit ipſis NM, $\alpha\delta$; NA, Hϵ. addatur commune NA, $\alpha\delta$; et NHα una cum NA, $\alpha\delta$ aequale erit (ipſis NM, $\alpha\delta$; NA, Hϵ; NA, $\alpha\delta$; hoc eſt, propter Hϵ, $\alpha\delta$ ſimul aequales ipſis Hα, $\delta\epsilon$) rectangulis NM, $\alpha\delta$; NA, Hα; NA, $\delta\epsilon$. Ergo quoniam, ex hypotheſi, ratio NM ad MH major eſt ratione rectanguli NHα ad ipſum HS, Nγ; erit * NM major NA. Cadit igitur punctum A inter parallelas DE, FG. Per ipſum ducatur recta ipſi BC parallela; erit haec Locus quaeſitus. Sumatur enim in ea punctum quodvis A, et ducantur rectae ab ipſo ut in primo caſu. Et quoni-



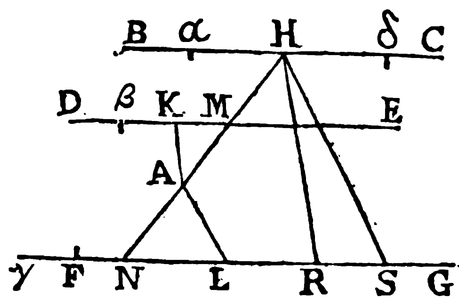
* Vide D
† Vide B
* Vide A
* Vide C

K am

am oſtenſum fuit rectangulum NHα una cum NA, αδ aequale ipſis NM, αδ; NA, Hα; NA, δε; ablatis utrinque rectangulis NA, Hα; NA, αδ; erit rectangulum AHα aequale ipſis (AM, αδ; NA, δε; hoc eſt ipſis) AK, Mβ; AL, Nγ.

2do. Idem autem eodem modo demonſtrabitur in ſecunda hypotheſi, in qua ratio NH ad NM minor eſt ratione rectanguli HR, Mβ ad ipſum NHα; et in qua propterea debet etiam ratio NM ad MH minor eſſe ratione rectanguli NHα ad ipſum HS, Nγ.

Sit jam rectangulum NHα aequale ipſi NM, αδ; et quoniam rectangulum NHα una cum ipſo NA, αδ aequale eſt rectangulis NM, αδ; NA, Hα; NA, δε; erit reliquum, rectangulum ſc. NA, Hα una cum ipſo NA, δε aequale reliquo NA, αδ. Recta igitur NA minime data erit, et propterea punctum A ubicunque ſumi poterit inter parallelas DE, FG, inter quas ex hypotheſi locandum eſt.



Quoniam vero rectangulum NHα aequale eſt ipſi NM, αδ; erit ratio NH ad NM eadem rationi (αδ ad Hα, hoc eſt rationi rectanguli NH, αδ ad ipſum NHα, hoc eſt rationi) rectanguli HR, Mβ ad rectangulum NHα.

Tertia igitur hypotheſis magnitudinum datarum ſit haec; rationem rectae NH ad NM, eandem eſſe rationi rectanguli HR, Mβ ad ipſum NHα. et retrogradiendo oſtendetur rectangulum NHα aequale ipſi NM, αδ; igitur, ut oſtenſum fuit, erit rectangulum NA, Hα una cum NA, δε aequale ipſi NA, αδ. quare neceſſe eſt ut recta Hα una cum δε aequalis ſit ipſi αδ, ſeu ut punctum ε incidat in H. Ideoque rectangulum NHα una cum NH, δε aequale debet eſſe ipſi NH, αδ; hoc eſt rectangulum NHα una cum HS, Nγ aequale debet eſſe rectangulo HR, Mβ. Et ſi hoc ultimum ponatur, retrogradiendo oſtendetur recta Hα una cum δε aequalis ipſi αδ.

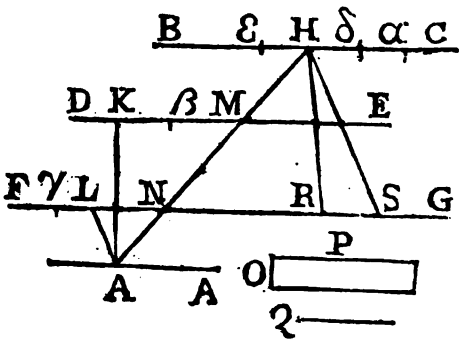
Compo-

Componetur hoc ita.

Ductis rectis NH, HR, HS, *&c.* ut in praecedente compoſitione; ſit NH ad NM, ut rectangulum HR, $M\beta$ ad ipſum $NH\alpha$; et ſimul ſit rectangulum $NH\alpha$ una cum HS, $N\gamma$ aequale ipſi HR, $M\beta$. Sumatur vero quodcunque punctum A inter parallelas DE, FG, et ab ipſo ducantur rectae AH, AK, AL ut in primo caſu; erit rectangulum $AH\alpha$ aequale ipſis AK, $M\beta$; AL, $N\gamma$. Quoniam enim ratio NH ad NM eadem eſt rationi rectanguli HR, $M\beta$ ad ipſum $NH\alpha$, erit, ut oſtenſum, $NH\alpha$ aequale ipſi NM, $\alpha\delta$. Et quoniam rectangulum $NH\alpha$ una cum HS, $N\gamma$ aequale eſt ipſi HR, $M\beta$, erit recta $H\alpha$ una cum $\delta\varepsilon$ aequalis ipſi $\alpha\delta$. Ergo rectangulum NA, $\alpha\delta$ aequale eſt ipſis NA, $H\alpha$; NA, $\delta\varepsilon$. additiſque aequalibus $NH\alpha$; NM, $\alpha\delta$; erit $NH\alpha$ una cum NA, $\alpha\delta$ aequale ipſis NM, $\alpha\delta$; NA, $H\alpha$; NA, $\delta\varepsilon$. et utrinque ablatis NA, $H\alpha$; NA, $\alpha\delta$; erit $AH\alpha$ aequale ipſis (AM, $\alpha\delta$; NA, $\delta\varepsilon$; hoc eſt ipſis) AK, $M\beta$; AL, $N\gamma$. Quare Locus in hoc ultimo membro caſus tertii vertitur in Theorema.

Caſ. 4. Quando punctum A eſt extra parallelas ad partes ſecundae extremae FG.

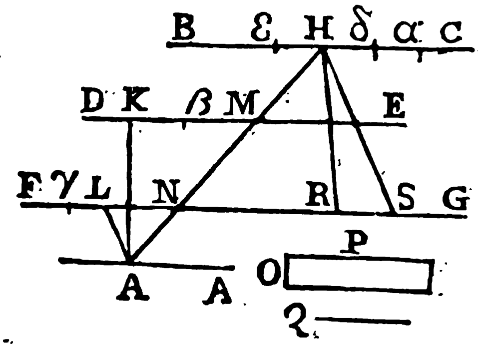
Reliquis ut in primo caſu manentibus, ſumptiſque ut in eo rectis $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$; oſtendetur, ut ibi, rectangulum $AH\alpha$ aequale ipſis AM, $\alpha\delta$; AN, $\delta\varepsilon$; additiſque utrinque rectangulis MH, $\alpha\delta$; NH, $\delta\varepsilon$; erunt rectangula $AH\alpha$; MH, $\alpha\delta$; NH, $\delta\varepsilon$; ſimul aequalia ipſis AH, $\alpha\delta$; AH, $\delta\varepsilon$; horum igitur exceſſus ſupra rectangulum $AH\alpha$ aequalis eſt ipſis MH, $\alpha\delta$; NH, $\delta\varepsilon$, hoc eſt ſpatio dato. et datae ſunt $H\alpha$, $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$, quare data eſt AH; et punctum A tanget rectam poſitione datam, ut in caſu primo oſtenſum fuit.



Ducantur rectae HN, HR, HS; et inveniantur rectae $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$, ut in

primo caſu, quarum αδ ponatur in recta Hα, a puncto α verſus H, et δε verſus eaſdem partes. Et quoniam rectangulum AH, αδ una cum AH, δε majus eſt ipſo AHα, debet recta αδ una cum δε major eſſe ipſa Hα; ideoque rectangulum NH, αδ una cum NH, δε, hoc eſt rectangulum HR, Mβ una cum HS, Nγ majus debet eſſe rectangulo NHα. Et ſi fuerit rectangulum HR, Mβ una cum HS, Nγ majus ipſo NHα, retrogradiendo oſtendetur αδ uno cum δε major recta Hα.

Praeterea quoniam requiritur punctum A inveniri extra parallelas ad partes ipſius FG, debet AH major eſſe NH. Eſt autem rectangulum AHα ſimul cum ipſis MH, αδ; NH, δε; aequale (ipſis AH, αδ; AH, δε; hoc eſt) rectangulo AH, αε; ablato igitur communi AHα, erunt MH, αδ; NH, δε; ſimul aequalia ipſi AHε. Et quoniam recta AH major eſt ipſa NH,



erit rectangulum AHε, hoc eſt rectangulum MH, αδ una cum NH, δε majus rectangulo NHε: additoque communi NM, αδ; erit rectangulum NH, αδ una cum NH, δε majus ipſis NM, αδ; NHε. ablatoque communi NHε, erit rectangulum NHα majus ipſo NM, αδ. Ergo ratio NH ad NM major debet eſſe ratione (αδ ad Hα, hoc eſt ratione rectanguli NH, αδ ad ipſum NHα, hoc eſt ratione) rectanguli HR, Mβ ad NHα. Et ſi fuerit ratio NH ad NM major ratione rectanguli HR, Mβ ad NHα, retrogradiendo oſtendetur rectangulum NHα majus NM, αδ; et recta AH major ipſa NH.

Igitur in caſ. 4. debet rectangulum HR, Mβ una cum HS, Nγ majus eſſe rectangulo NHα. Et ſimul debet ratio NH ad NM major eſſe ratione rectanguli HR, Mβ ad ipſum NHα. Hiſce praemiſſis

Componetur ita.

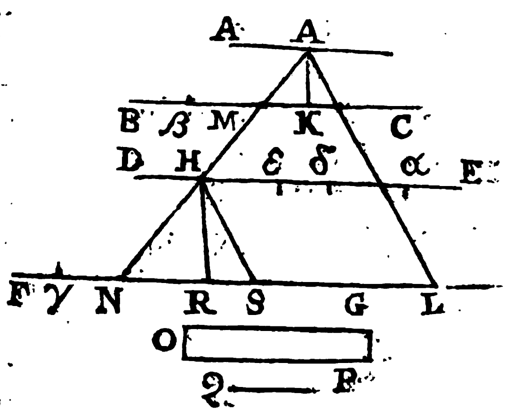
Ductis NH, HR, HS, et inventis poſitiſque rectis αδ, δε ut dictum fuit, quoniam ex praemiſſa determinatione rectangulum HR, Mβ una cum

Digitized by Google

cum HS, Nγ majus eſt ipſo NHα, erit αδ una cum δε major rectâ Hα. Rectangulis vero MH, αδ; NH, δε ſimul aequale inveniatur rectangulum contentum O, P rectis; et ut Hε ad O, ita fiat P ad quartam HA quae in recta HN ponatur a puncto H verſus N. Rectangulum igitur O, P hoc eſt rectangulum MH, αδ una cum NH, δε aequale erit rectangulo AHε. additoque communi AHα, erit rectangulum AHα una cum ipſis MH, αδ; NH, δε; aequale (ipſi AH, αε, hoc eſt) ipſis AH, αδ; AH, δε. Ergo quoniam, ex reliqua parte determinationis, eſt ratio NH ad NM major ratione rectanguli HR, Mβ ad NHα, erit recta AH major NH. Cadit igitur punctum A extra parallelas ad partes ipſius FG. per ipſum ducatur recta ipſi BC parallela, Erit haec Locus quaeſitus. Sumatur enim in ea punctum quodvis A, et ab ipſo ducantur rectae ad parallelas, ut in primo caſu; et quoniam oſtenſum fuit rectangulum AHα una cum ipſis MH, αδ; NH, δε aequale ipſis AH, αδ; AH, δε; ablatis utrinque rectangulis MH, αδ; NH, δε; erit rectangulum AHα aequale ipſis (AM, αδ; AN, δε; hoc eſt ipſis) AK, Mβ; AL, Nγ.

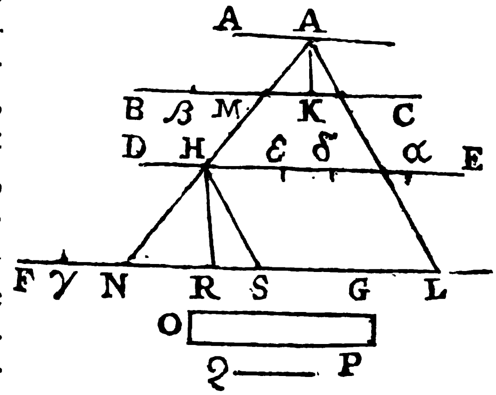
Caſ. 5. Quando punctum A eſt extra parallelas ad utraſvis partes; recta vero quae ad parallelam mediam ducta eſt, continet cum recta data rectangulum aequale duobus reliquis rectangulis, quae ſc. continentur ductis ad reliquas parallelas, et datis rectis.

Sit punctum A extra parallelas, puta ad partes ipſius BC. et ad BC, DE, FG ductae ſint in datis angulis, rectae AK, AH, AL, quarum AH occurrat ipſis BC, FG in M, N punctis; ſitque rectangulum contentum AH et data recta Hα aequale contento AK et data Mβ una cum contento AL et data Nγ, Et ſumptis rectis αδ, δε ut in primo caſu, oſtendetur ut in eo rectangu-



lum

lum AHα aequale ipſis AM, $\alpha\delta$; AN, $\delta\epsilon$; hoc eſt rectangula AM, Hα; MHα aequalia (ipſis AM, $\alpha\delta$; AM, $\delta\epsilon$; MN, $\delta\epsilon$; hoc eſt) ipſis AM, $\alpha\epsilon$; MN, $\delta\epsilon$. Rectangula vero MHα; MN, $\delta\epsilon$; vel ſunt inaequalia, vel inter ſe aequalia. Primo ſint inaequalia; igitur exceſſus rectanguli AM, Hα et ipſius AM, $\alpha\epsilon$ aequalis erit exceſſui ipſorum MN, $\delta\epsilon$; MHα, hoc eſt ſpatio dato. et propter datas Hα, $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ dabitur AM. Poſitione autem data eſt BC, datuſque eſt angulus AMB; Ergo tangit punctum A rectam poſitione datam per Prop. 20. hujus.



A puncto quovis H in recta DE, ducantur ad FG rectae HN, HR, HS, et inveniantur rectae $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ut in primo caſu, quarum $\alpha\delta$ ponatur in recta Hα, a puncto α verſus H, et $\delta\epsilon$ ad eaſdem partes.

Et primo ſit rectangulum MN, $\delta\epsilon$ majus ipſo MHα; ratio igitur MN ad MH major erit ratione (Hα ad $\delta\epsilon$, hoc eſt ratione rectanguli NHα ad NH, $\delta\epsilon$; hoc eſt ratione) rectanguli NHα ad ipſum HS, Nγ: Et ſi hoc fuerit, retrogradiendo oſtendetur rectangulum MN, $\delta\epsilon$ majus ipſo MHα; Igitur quoniam rectangulum AM, Hα; una cum MHα aequale oſtenſum fuit ipſis AM, $\alpha\delta$; AM, $\delta\epsilon$; MN, $\delta\epsilon$; erit rectangulum AM, Hα; majus ipſis AM, $\alpha\delta$; AM, $\delta\epsilon$; quare debet recta Hα major eſſe ipſis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ſimul; ideoque debet rectangulum NHα majus eſſe ipſis (NH, $\alpha\delta$; NH, $\delta\epsilon$; hoc eſt ipſis) HR, Mβ; HS, Nγ; Et ſi hoc fuerit, retrogradiendo oſtendetur Hα major ipſis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ſimul.

Si igitur ratio MN ad MH major fuerit ratione rectanguli NHα ad ipſum HS, Nγ (quae ſit 1ma hypotheſis) debet rectangulum NHα majus eſſe ipſis HR, Mβ; HS, Nγ ſimul.

Secundo ſit MN, $\delta\epsilon$ minus ipſo MHα; et ſimiliter oſtendetur ratio MN ad MH minor ratione NHα ad ipſum HS, Nγ; et contra. unde

et

Digitized by Google

et $H\alpha$ minor oſtendetur ipſis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ſimul; ideoque et $NH\alpha$ minus erit ipſis HR, $M\beta$; HS, $N\gamma$ ſimul; et contra.

Si igitur ratio MN ad MH minor fuerit ratione rectanguli $NH\alpha$ ad ipſum HS, $N\gamma$ (quae ſit ſecunda hypotheſis) debet rectangulum $NH\alpha$ minus eſſe ipſis HR, $M\beta$; HS, $N\gamma$.

Hiſce praemiſſis componetur Caſ. 5. in duabus praedictis hypotheſibus ita.

Ductis HN, HR, HS, et inventis poſitiſque rectis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ut dictum fuit; Primo ſit ratio rectae MN ad MH major ratione rectanguli $NH\alpha$ ad HS, $N\gamma$; et ſimul ſit rectangulum $NH\alpha$ majus ipſis HR, $M\beta$; HS, $N\gamma$ ſimul. Igitur propter ultimam hanc conditionem, erit recta $H\alpha$ major ipſis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ſimul, ut prius oſtenſum. Et quoniam ratio MN ad MH major eſt ratione $NH\alpha$ ad HS, $N\gamma$; erit, ut oſtenſum fuit, rectangulum MN, $\delta\epsilon$ majus ipſo $MH\alpha$. Ipſorum exceſſui aequale fiat rectangulum rectis O, P contentum; hoc eſt ſit rectangulum MN, $\delta\epsilon$ aequale ipſis $MH\alpha$; O, P ſimul. Et ut $H\epsilon$ ad O, ita fiat P ad quartam MA, quae ponatur in recta HM producta extra parallelas ad partes ipſius BC. et per punctum A ducatur recta ipſi BC parallela; Erit haec Locus quaeſitus. a quovis enim puncto A in ipſa, ducantur ad parallelas DE, BC, FG rectae AH, AK, AL parallelae ipſis HN, HR, HS. Et quoniam ex conſtructione, rectangulum AM, $H\epsilon$ aequale eſt ipſi O, P; addito communi $MH\alpha$; erit $MH\alpha$ una cum AM, $H\epsilon$ aequale (ipſis $MH\alpha$; O, P; hoc eſt) ipſi MN, $\delta\epsilon$. addatur utrinque rectangulum AM, $\alpha\epsilon$; ſeu AM, $\alpha\delta$ una cum AM, $\delta\epsilon$; et erit $MH\alpha$ una cum AM, $H\alpha$, hoc eſt erit $AH\alpha$ aequale ipſis (AM, $\alpha\delta$; AN, $\delta\epsilon$; hoc eſt ipſis) AK, $M\beta$; AL, $N\gamma$ rectangulis.

2do. Idem autem eodem modo oſtendetur in ſecunda hypotheſi in qua ſc. ratio MN ad MH minor eſt ratione rectanguli $NH\alpha$ ad ipſum HS, $N\gamma$; et in qua propterea debet rectangulum $NH\alpha$ minus eſſe ipſis HR, $M\beta$; HS, $N\gamma$.

Jam ſit rectangulum $MH\alpha$ aequale ipſi MN, $\delta\epsilon$; et quoniam rectangulum AM, $H\alpha$ una cum $MH\alpha$ aequale eſt ipſis AM, $\alpha\delta$; AM,

$\delta\epsilon$;

Digitized by Google

$\delta\epsilon$; MN, $\delta\epsilon$; erit rectangulum AM, Hα aequale ipſis AM, $\alpha\delta$; AM, $\delta\epsilon$. Recta igitur MA minime data erit, et propterea punctum A ubicunque ſumi poterit extra parallelas ad partes ipſius BC, ad quas ex hypotheſi locandum eſt.

Quoniam vero rectangulum MN, $\delta\epsilon$ aequale eſt ipſi MHα, erit ratio MN ad MH eadem rationi (Hα ad $\delta\epsilon$, hoc eſt rationi rectanguli NHα ad ipſum NH, $\delta\epsilon$, hoc eſt rationi) rectanguli NHα ad rectangulum HS, Nγ.

Si igitur ratio rectae MN ad MH eadem fuerit rationi rectanguli NHα ad ipſum HS, Nγ (quae ſit tertia hypotheſis) retrogradiendo oſtendetur rectangulum MHα aequale ipſi MN, $\delta\epsilon$. igitur, ut oſtenſum fuit, rectangulum AM, Hα aequale erit ipſis AM, $\alpha\delta$; AM, $\delta\epsilon$; quare neceſſe eſt ut recta Hα aequalis ſit ipſis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ſimul; et propterea rectangulum NHα aequale debet eſſe ipſis (NH, $\alpha\delta$; NH, $\delta\epsilon$; hoc eſt ipſis) HR, Mβ; HS, Nγ ſimul. Et ſi hoc ultimum ponatur retrogradiendo oſtendetur recta Hα aequalis ipſis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$.

Componetur vero ita.

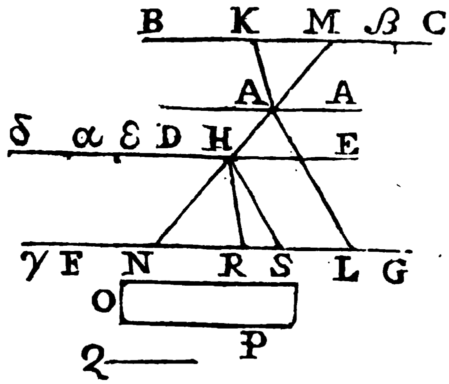
Ductis rectis HN, HR, HS; et inventis poſitiſque rectis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ut in praecedente compoſitione; ſit MN ad MH, ut rectangulum NHα ad ipſum HS, Nγ; et ſimul ſit NHα aequale rectangulis HR, Mβ; HS, Nγ. Sumatur vero quodcunque punctum A extra parallelas ad partes ipſius BC, et ab ipſo ad rectas DE, BC, FG ducantur rectae AH, AK, AL parallelae ipſis HN, HR, HS; erit rectangulum AHα aequale ipſis AK, Mβ; AL, Mγ: nam quoniam ratio rectae MN ad MH eadem eſt rationi rectanguli NHα ad ipſum HS, Nγ, erit, ut prius oſtenſum, rectangulum MHα aequale ipſi MN, $\delta\epsilon$. Et quoniam rectangulum NHα aequale eſt ipſis HR, Mβ; HS, Nγ; erit recta Hα aequale ipſis $\alpha\delta$, $\delta\epsilon$ ſimul. Ergo rectangulum AM, Hα aequale eſt ipſis AM, $\alpha\delta$; AM, $\delta\epsilon$; hiſce addantur aequalia rectangula MHα; MN, $\delta\epsilon$; et rectangulum AM, Hα una cum MHα aequale erit ipſis AM, $\alpha\delta$; AM, $\delta\epsilon$; MN, $\delta\epsilon$; hoc eſt rectangulum AHα aequale erit ipſis (AM, $\alpha\delta$; AN, $\delta\epsilon$; hoc eſt ipſis) AK, Mβ; AL, Nγ. Quare et in hoc caſu Locus vertitur in Theorema.

Cas. 6.

Digitized by Google

Caſ. 6. Quando punctum A eſt inter parallelas, et ducta ab ipſo ad parallelam mediam continet cum recta data rectangulum aequale duobus reliquis.

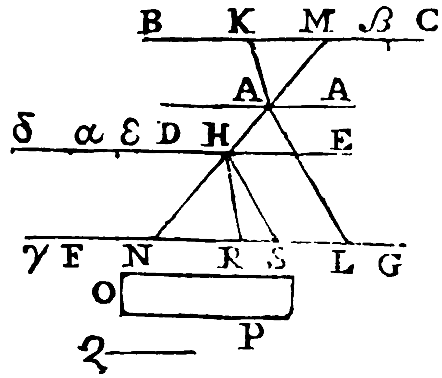
Sit punctum A inter parallelas, puta inter ipſas BC, DE. et ductis ad BC, DE, FG rectis AK, AH, AL in datis angulis; ſit rectangulum contentum AH, et data recta Hα aequale contento AK, et data Mβ, una cum contento AL et data Nγ. Et ſumantur rectae $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ ut in caſu primo, utque in eo oſtendetur rectangulum AHα, aequale ipſis AM, $\alpha\delta$; AN, $\delta\varepsilon$. addatur commune AH, $\alpha\delta$; et rectangulum AHα una cum AH, $\alpha\delta$ aequale erit ipſis MH, $\alpha\delta$; AH, $\delta\varepsilon$; HN, $\delta\varepsilon$. Exceſſus igitur rectanguli AHα una cum ipſo AH, $\alpha\delta$ ſupra rectangulum AH, $\delta\varepsilon$ aequalis erit rectangulis MH, $\alpha\delta$; HN, $\delta\varepsilon$; hoc eſt ſpatio dato: et datae ſunt Hα, $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$; quare data eſt AH. Poſitione autem data eſt DE, datuſque eſt angulus AHD; ergo tangit punctum A rectam poſitione datam per Prop. 20. hujus.



Ducantur rectae HN, HR, HS ut in praecedente caſu; et inveniantur rectae $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ ut in caſu primo, quarum $\alpha\delta$ ponatur in Hα producta ad partes α, $\delta\varepsilon$ vero ad contrarias. Et quoniam auferendum eſt rectangulum AH, $\delta\varepsilon$ ex ipſis AHα; AH, $\alpha\delta$; neceſſe eſt ut Hα una cum $\alpha\delta$ major ſit ipſa $\delta\varepsilon$. quare rectangulum NHα una cum NH, $\alpha\delta$ majus debet eſſe ipſo NH, $\delta\varepsilon$; hoc eſt debet NHα una cum HR, Mβ majus eſſe rectangulo HS, Nγ. Et ſi hoc fuerit, retrogradiendo oſtendetur Hα una cum $\alpha\delta$ major rectâ $\delta\varepsilon$.

Praeterea quoniam requiritur ut punctum A ſit inter parallelas BC, DE, debet MH major eſſe quam AH. oſtenſum autem fuit rectangulum AHα una cum AH, $\alpha\delta$; hoc eſt rectangulum AHδ, aequale ipſis MH, $\alpha\delta$; AH, $\delta\varepsilon$; HN, $\delta\varepsilon$; ablato igitur rectangulo AH, $\delta\varepsilon$, erit re-

ctangulum $AH\varepsilon$ aequale ipſis MH, $\alpha\delta$; HN, $\delta\varepsilon$. Et quoniam eſt recta MH major ipsâ AH, erit rectangulum $MH\varepsilon$ majus ($AH\varepsilon$, hoc eſt) ipſis MH, $\alpha\delta$; HN, $\delta\varepsilon$. addatur utrinque rectangulum MH, $\varepsilon\alpha$; et rectangulum $MH\alpha$ majus erit (ipſis MH, $\delta\varepsilon$; HN, $\delta\varepsilon$; hoc eſt) ipſo MN, $\delta\varepsilon$. Ergo ratio MH ad MN major eſt ratione ($\delta\varepsilon$ ad $H\alpha$; hoc eſt ratione rectanguli NH, $\delta\varepsilon$ ad ipſum $NH\alpha$; hoc eſt ratione) rectanguli HS, $N\gamma$ ad rectangulum $NH\alpha$. Et ſi fuerit ratio MH ad MN major ratione rectanguli HS, $N\gamma$ ad ipſum $NH\alpha$; retrogradiendo oſtendetur rectangulum $MH\alpha$ majus ipſo MN, $\delta\varepsilon$; et recta MH major ipsâ AH.



Igitur in caſu ſexto debet rectangulum $NH\alpha$ una cum HR, $M\beta$ majus eſſe rectangulo HS, $N\gamma$. Et ſimul debet ratio MH ad MN major eſſe ratione rectanguli HS, $N\gamma$ ad ipſum $NH\alpha$.

Ultima vero haec conditio determinationi hujus caſus ſufficit, ex ea enim neceſſario ſequitur prima. Nam ratio MH ad MN eſt minoris ad majorem, quare cum ſit ratio MH ad MN, major ratione rectanguli HS, $N\gamma$ ad ipſum $NH\alpha$, erit HS, $N\gamma$ minus rectangulo $NH\alpha$; ideoque rectangulum $NH\alpha$ majus erit ipſo HS, $N\gamma$: multo igitur rectangulum $NH\alpha$ una cum rectangulo HR, $M\beta$ majus erit ipſo HS, $N\gamma$; quae fuit prima conditio. Hiſce praemiſſis,

Componetur ita.

Ductis NH, HR, HS, et inventis poſitiſque $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$ ut dictum fuit; Sit ratio MH ad MN major ratione rectanguli HS, $N\gamma$ ad ipſum $NH\alpha$; unde, ut jam oſtenſum, rectangulum $NH\alpha$ una cum HR, $M\beta$ majus erit rectangulo HS, $N\gamma$. Erit igitur $H\alpha$ una cum $\alpha\delta$ major ipſa $\delta\varepsilon$. Rectangulis vero MH, $\alpha\delta$; HN, $\delta\varepsilon$ ſimul, aequale fiat rectangulum rectis O, P contentum; et ut $H\varepsilon$ ad O, ita fiat P ad quartam HA, quae ponatur in recta NH producta verſus BC. Eſt igitur rectangulum $AH\varepsilon$ aequale (ipſi O, P hoc eſt) ipſis MH, $\alpha\delta$; HN, $\delta\varepsilon$. addatur commune

commune AH, $\delta\epsilon$, et rectangula A Hϵ; A H, $\delta\epsilon$; hoc eſt rectangula AHα; AH, $\alpha\delta$ aequalia erunt ipſis MH, $\alpha\delta$; HN, $\delta\epsilon$; AH, $\delta\epsilon$. Ergo quoniam ratio MH ad M N major eſt ratione rectanguli H S, Nγ ad ipſum NHα, erit MH major HA. Cadit igitur punctum A inter rectas BC, DE. per A ducatur recta parallela ipſi BC; erit haec Locus quaeſitus. Ducantur enim a quovis in ea puncto A rectae ut in caſu quinto, et quoniam rectangulum AHα una cum AH, $\alpha\delta$ aequale oſtenſum eſt rectangulis MH, $\alpha\delta$; NH, $\delta\epsilon$; A H, $\delta\epsilon$; ablato communi AH, $\alpha\delta$; erit rectangulum AHα aequale ipſis (AM, $\alpha\delta$; AN, $\delta\epsilon$; hoc eſt ipſis) AK, Mβ; AL, Nγ.

Ductis igitur rectis HN, HR, HS; datiſque magnitudine Hα, Mβ, Nγ; erit rectangulum NHα vel majus vel minus ipſis HR, Mβ; HS, Nγ ſimul, vel iiſdem aequale. Et ſiquidem ipſis majus fuerit, poterit locus inveniri per cas. 1. quando ſcilicet requiritur ut ductâ A H ad unam ex parallelis extremis, rectangulum A Hα aequale ſit duobus reliquis. Et ſi ſimul ratio MH ad MN major fuerit ratione H S, Nγ ad NHα, ſeu, quod idem eſt, ſi fuerit ratio NM ad MH minor ratione NHα ad HS, Nγ poterit etiam alius locus inveniri per cas. 2. non autem, manentibus hiſce duabus conditionibus, per cas. 3. nam ratio NH ad NM eſt majoris ad minorem, rectangulum vero HR, Mβ minus eſt ipſo NHα; quare ratio NH ad NM major eſt ratione HR, Mβ ad NH α, et propterea per determinationem cas. 3. deberet ratio NM ad MH major eſſe ratione NHα ad HS, Nγ. Eſt autem ex hypotheſi minor, ergo non invenietur locus per cas. 3. et quoniam in caſu quarto requiritur rectangulum NHα minus eſſe ipſis HR, Mβ; HS, Nγ ſimul, neque per hunc caſum poterit Locus inveniri.

Si autem rectangulum NHα majus ſit ipſis HR, Mβ; HS, Nγ; et ſimul ratio N M ad M H major ſit ratione N Hα ad ipſum HS, Nγ; Locus non invenietur per cas. 2. Quoniam vero NH ad NM oſtenſa eſt major ratione HR, Mβ ad NHα invenietur Locus per cas. 3.

Jam ſit rectangulum NHα minus ipſo HR, Mβ una cum HS, Nγ. Locus igitur non invenietur per cas. 1. Sed ſi ſimul fuerit ratio NM ad MH minor ratione NHα ad HS, Nγ poterit inveniri per cas. 2.

Digitized by Google

Et ſi praeterea fuerit NH ad NM minor ratione HR, Mβ ad NHα, invenietur alius Locus per cas. 3. non autem per 4^tum^. quia in eo ratio NH ad NM major debet eſſe ratione HR, Mβ ad NHα. Si autem fuerit ratio NH ad NM major ratione HR, Mβ ad NHα manentibus praedictis duabus conditionibus Locus non invenietur per cas. 3. ſed per cas. 4.

Si rectangulum NHα minus fuerit ipſis HR, Mβ; HS, Nγ; et ſimul ratio NM ad MH major fuerit ratione NHα ad HS, Nγ; non invenietur Locus per cas. 1. aut cas. 2. Sed ſi praeterea ratio NH ad NM major fuerit ratione HR, Mβ ad NHα, invenietur per cas. 3. et etiam per cas. 4. Sed ſi fuerit ratio NH ad NM minor ratione HR, Mβ ad NHα manentibus duabus reliquis conditionibus Locus per nullum ex quatuor primis caſibus invenietur, adeoque nullo modo conſtrui poterit.

Denique ſi rectangulum NHα una cum HS, Nγ aequale fuerit ipſi HR, Mβ; et ſimul fuerit NH ad NM, ut HR, Mβ ad NHα quodcunque punctum inter parallelas DE, FG propoſitum in propoſitione efficiet.

Si rectangulum NHα aequale fuerit ipſis HR, Mβ; HS, Nγ ſimul, non poterit Locus inveniri per cas. 1. 3. aut 4. ſed ſi praeterea fuerit ratio NM ad MH minor ratione NHα ad HS, Nγ poterit inveniri per cas. 2.

Si vero requiratur ut, ductâ AH ad parallelam mediam, rectangulum AHα aequale ſit duobus reliquis, Locus invenietur per cas. 5. ſc. Si ratio NM ad MH major fuerit ratione NHα ad HS, Nγ; et ſimul rectangulum NHα majus ſit ipſis HR, Mβ; HS, Nγ; non autem per cas. 6. quia in eo requiritur ut ratio NM ad MH minor ſit ratione NHα ad HS, Nγ. Si autem, manente prima conditione, HNα non majus fuerit ipſis HR, Mβ; HS, Nγ; Locus neque per 5^tum^. neque per 6^tum^ caſum invenietur, et conſtrui non poterit. at ſi ratio NM ad MH minor ſit ratione NHα ad HS, Nγ; invenietur Locus per cas. 6. Et ſi ſimul rectangulum NHα minus fuerit ipſis HR, Mβ; HS, Nγ; invenietur alius Locus per cas. 5^tum^. Si vero fuerit NM ad MH, ut

NHα

Digitized by Google

NHα ad HS, Nγ; et ſimul ſit NHα aequale ipſis HR, Mβ; HS, Nγ; quodvis punctum extra parallelas ad partes ipſius BC propoſitum efficiet.

Si autem determinationes caſus quinti vel caſus ſexti obtineant quando punctum A eſt ad partes rectae DE ad quas eſt BC, etiam obtinebunt quando A eſt ad alteras partes ipſius DE. Et propterea ſi Locus conſtrui poterit in caſu quinto vel ſexto in prima hypotheſi ſc. quando A eſt ad partes rectae DE ad quas eſt BC, dabitur etiam Locus per eoſdem caſus, quando A eſt ad alteras partes ipſius DE.

Similiter vero procedendum ſi fuerint quatuor aut plures parallelae poſitione datae, fuerintque rectangula contenta quibuſdam ex ductis et datis rectis, aequalia rectangulis contentis reliquis ductis et totidem datis rectis.

Lemma II.

Si fuerint quotcunque magnitudines quae binae ſumptae in eadem ſunt ratione, et ſint rectangula contenta quibuſvis ipſarum terminis antecedentibus et datis rectis, ſimul aequalia rectangulis contentis reliquis terminis antecedentibus et datis rectis. Erunt rectangula contenta terminis primos antecedentes conſequentibus, et primis datis rectis, ſimul aequalia rectangulis contentis reliquis terminis conſequentibus et reliquis rectis datis.

Sint enim in eadem ratione A ad B, C ad D, E ad F *&c.* ſitque rectangulum A, α aequale ipſis C, γ; E, ε ſimul: erit B, α aequale ipſis D, γ; F, ε.

Eſt enim per 1. 6. A, α ad B, α ut C, γ ad D, γ; et ut E, ε ad F, ε. Quare per 12. 5. eſt A, α ad B, α ut C, γ et E, ε ſimul ad D, γ et F, ε. Et aequale eſt A, α ipſis C, γ; E, ε, quare B, α aequale eſt ipſis D, γ; F, ε. Et ſimiliter ſi plures fuerint magnitudines.

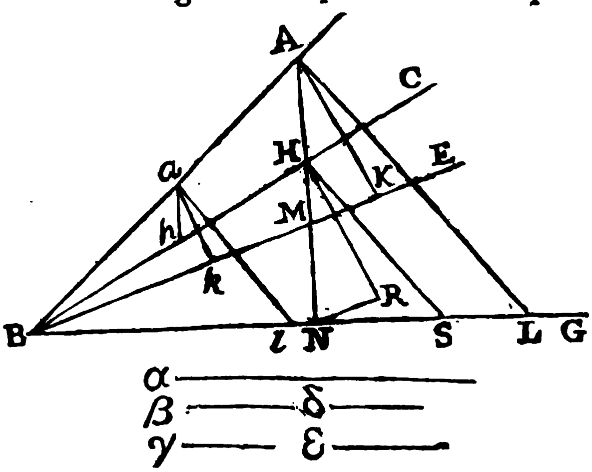
PROP.

Digitized by Google

Prop. XXVII.

Quando poſitione dantur tres rectae lineae per unum idemque punctum tranſeuntes. caeteris ut in Propoſitione praecedente manentibus.

Sint tres rectae BC, BE, BG poſitione datae, et ad ipſas a puncto A ducantur in datis angulis rectae AH, AK, AL quarum AH ſit ea quae cum data recta α continet rectangulum aequale duobus quae continentur reliquis ductis et datis rectis β, γ. producta vero AH, quae ducta eſt ad BC, occurrat reliquis poſitione datis in duobus punctis M, N, et ſi H non fuerit inter puncta illa, ſit M punctum illud quod propius eſt ipſi H, ſit autem BE recta in qua eſt punctum M; et BG erit ea in qua eſt reliquum punctum N.



In caſu vero quo punctum H eſt inter ipſa M, N, ſit M punctum illud quod vel eſt inter A, H puncta, vel in recta HA producta ad partes A, ſit autem B C recta in qua eſt punctum M, et erit N in reliqua BG. Sitque β recta data quae latus eſt rectanguli cujus alterum latus eſt recta ad BE ducta, et γ latus reliqui rectanguli. atque his rite obſervatis poterint caſus hujus diſtingui eodem modo quo caſus Propoſitionis praecedentis ope ſc. punctorum A, H, M, N. Et cas. primus erit (exiſtente puncto H in recta NM productâ in hoc, et tribus ſequentibus caſibus) quando punctum A eſt extra reliqua puncta H, M, N ad partes ipſius H. Secundus quando A eſt inter puncta H, M. Tertius quando A eſt inter M, N. Quartus quando A eſt extra reliqua

reliqua puncta ad partes puncti N. Quintus caſus (in quo, ut et in 6to, H eſt inter M, N puncta) eſt quando punctum A eſt extra reliqua puncta ad utraſvis partes. et Sextus quando A eſt inter puncta reliqua. Quoniam vero horum omnium ſolutiones et determinationes paululum tantum differunt ab iis quae in caſibus primae partis adhibitae fuerunt; ſatis erit caſum primum oſtendere. Sit igitur

Cas. 1. Quando punctum A eſt extra reliqua puncta ad partes puncti H, ordine punctorum exiſtente, ut dictum fuit, A, H, M, N.

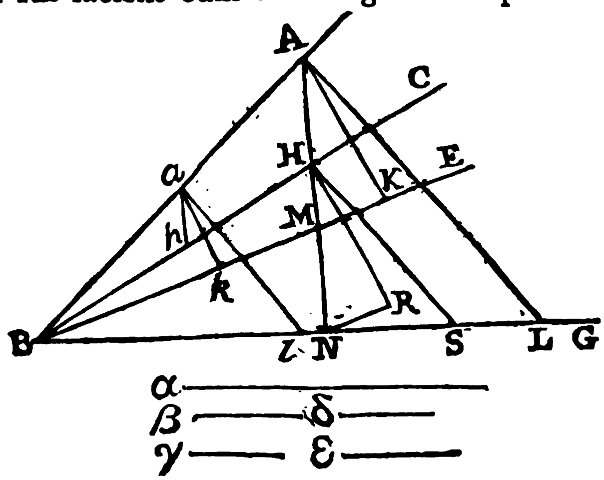
A puncto A ad tres poſitione datas BC, BE, BG, ductae ſint in datis angulis AH, AK, AL; ſitque rectangulum contentum AH et α aequale ipſis AK, β; AL, γ; datis ſc. α, β, γ.

Occurrat AH ipſis BE, BG in M, N; et quoniam ſpecie datum eſt triangulum AKM, dabitur ratio AM ad AK. in hac ratione ſit β ad δ, et propter datam β, dabitur recta δ; et rectangulum AM, δ aequale erit ipſi AK, β. ſimiliter quoniam data ratio AN ad AL, ſi in hac ratione fiat γ ad ε, dabitur ε, et rectangulum AN, ε aequale erit ipſi AL, γ. Eſt autem, ex hypotheſi, rectangulum AH, α aequale ipſis AK, β; AL, γ. quare idem AH, α aequale erit rectangulis (AM, δ; AN, ε; ſimul, hoc eſt [1. 2.] ipſis) AH, δ; HM, δ; AH, ε; HN, ε. et ablato communi rectangulo contento AH et ipſis δ, ε ſimul; erit reliquum contentum ſc. AH et exceſſu rectae α ſupra ipſas δ, ε ſimul, aequale reliquo, rectangulis ſc. HM, δ; HN, ε. quoniam vero data eſt ratio MH ad HB, et ratio HB ad HN; dabitur ratio MH ad HN. et datae ſunt δ, ε, ideoque et ipſarum ratio; quare [23. 6.] data eſt ratio rectanguli HM, δ ad ipſum HN, ε. et [6. dat.] propterea data eſt ratio HM, δ ſimul cum HN, ε ad ipſum HM, δ. Ergo data ratio rectanguli contenti AH et exceſſu rectae α ſupra ipſas δ, ε ſimul ad rectangulum HM, δ. datae autem ſunt α, δ, ε rectae, quare [68. dat.] data ratio AH ad MH. et data eſt HM ad HB; ergo data eſt ratio AH ad HB; datuſque eſt angulus AHB, quare, junctâ BA, triangulum ABH ſpecie dabitur [41. dat.] datus igitur eſt angulus ABH; data autem eſt BH poſitione, punctumque B datum eſt; poſitione igitur data eſt BA [29. dat.]. Tangit propterea punctum A rectam poſitione datam.

Componetur

Componetur vero ita.

In recta BC ſumatur punctum H, et ad BG ducatur NH faciens cum BH angulum aequalem dato angulo quem ducenda a puncto A ad BC cum ipſa comprehendere debet, occurratque HN ipſi BE in M. ducatur etiam a puncto H recta faciens cum BE angulum aequalem dato angulo quem ducenda a puncto A ad BE cum ipſa comprehendere debet, huic ductae occurrat recta per N parallela ipſi BE in R. denique ad BG ducatur HS faciens cum BG angulum aequalem reliquo dato angulo. Et ſint α, β, δ datae rectae quae latera debent eſſe rectangulorum quorum reliqua latera ſunt rectae ad ipſas BC, BE, BG ducendae. ut autem NH ad HR, ita fiat β ad δ. et ut NH ad HS, ita fiat γ ad ε. Et quoniam oſtenſum fuit rectangulum AH, α aequale ipſis AH, δ; HM, δ; AH, ε; HN, ε; erit AH, α



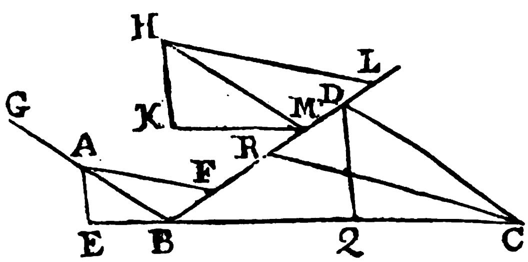
majus ipſis AH, δ; AH, ε. quare debet α major eſſe rectis δ, ε ſimul, et propterea rectangulum NH, α majus debet eſſe ipſis (HN, δ; NH, ε; hoc eſt propter praedictas proportiones, ipſis) HR, β; HS, γ; quae eſt determinatio hujus caſus. Sit igitur rectangulum NHα majus ipſis HR, β; HS, γ; et retrogradiendo oſtendetur α majus δ, ε ſimul. Sit ipſarum exceſſus recta ζ, hoc eſt ſit α aequalis ipſis δ, ε, ζ ſimul. Et rectangulis HM, δ; HN, ε ſimul aequale fiat rectangulum [45. 1.] contentum rectis O, P. ut vero recta ζ ad O, ita fiat P ad quartam Q; et producatur NH ad partes H ad punctum A ita ut HA aequalis ſit ipſi Q. Juncta BA erit Locus quaeſitus, hoc eſt ſi a quovis in ipſa puncto *a* ducantur ad ipſas BC, BE, BG rectae *a h*, *a k*, *a l* parallelae ipſis HN, HR, HS, erit rectangulum *a h*, α aequale ipſis *a k*, β; *a l*, γ. Nam quoniam

niam ex conſtructione, rectangulum AH, ζ aequale eſt (ipſi O, P, hoc eſt) ipſis HM, δ; HN, ϵ ſimul; addatur commune contentum ſc. AH et ipſis δ, ϵ ſimul; et rectangulum contentum AH et ipſis δ, ϵ, ζ ſimul, hoc eſt rectangulum AH, α aequale erit ipſis AM, δ; AN, ϵ. Eſt autem propter aequiangula triangula, AM ad AK, ut (HN ad HR, hoc eſt, ex conſtructione, ut) β ad δ; quare rectangulum AM, δ aequale eſt ipſi AK, β. Similiter eſt AN ad AL, ut (HN ad HS, hoc eſt ut) γ ad ϵ; quare rectangulum AN, ϵ aequale eſt ipſi AL, γ. Ergo rectangulum AH, α aequale eſt ipſis AK, β; AL, γ ſimul. Et quoniam eſt AH ad *ah*, ut (BA ad B*a*, hoc eſt, ut) AK ad *ak*, et etiam ut AL ad *al*; erit per Lem. 2. rectangulum *ah*, α aequale ipſis *ak*, β; *al*, γ ſimul.

Reliqui quinque caſus, ut et ii in quibus una vel plures ex rectis ductis parallelae ſunt totidem ex rectis poſitione datis, ſimiliter oſtendi poterint.

LEMMA III.

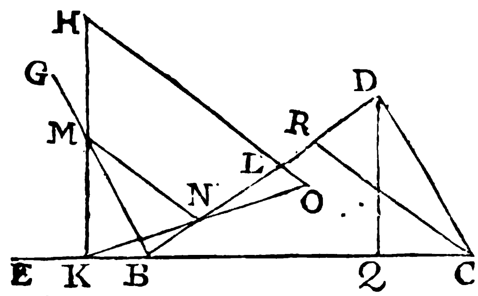
SIT triangulum BCD, et ducta BG parallela lateri oppoſito CD, ducantur a puncto quovis A in BG ad reliqua latera BC, BD, vel ad ipſa producta, rectae AE, AF; habebunt hae eandem inter ſe rationem quam habent DQ, CR quae ad eadem latera ab angulis trianguli ipſis oppoſitis, parallelae ducuntur ipſis AE, AF. idemque eveniet ſi vice rectarum BC, BG ſumantur duae MK, MH quae per punctum quodvis M in recta BD parallelae ducuntur ipſis BC, BG, ſc. ductis HK, HL ad MK, BD ipſis DQ, CR parallelis, erit HK ad HL, ut DQ ad CR.



Eſt enim, propter aequiangula triangula AEB, DQC; AE ad AB, ut DQ ad DC; ut vero AB ad AF, ita eſt DC ad CR propter aequiangula triangula ABF, CDR; ergo ex aequo eſt AE ad AF, ut DQ ad CR. et ſimiliter omnino oſtendetur HK ad HL, ut DQ ad CR.

Lemma IV.

Iisdem manentibus, ſc. ſit BG parallela lateri trianguli oppoſito DC, et producatur CB ad E; ſi a puncto H intra angulum GBD ducantur ad CB, BD rectae HK, HL ipſis DQ, CR parallelae, erit ratio HK ad HL major ratione DQ ad CR. Si vero punctum H fuerit intra angulum GBE, reliquis manentibus; erit ratio HK ad HL minor ratione DQ ad CR. Et contra, ſi a puncto H intra angulum trianguli exteriorem vel intra eum qui huic ad verticem oppoſitus eſt ducantur HK, HL ipſis DQ, CR parallelae, fueritque ratio HK ad HL major ratione DQ ad CR; erit punctum H intra angulum GBD vel ipſi ad verticem oppoſitum et propterea juncta BH occurret lateri CD producto ad partes D. Et ſi ratio HK ad HL minor fuerit ratione DQ ad CR, punctum H erit intra angulum GBE, vel ei ad verticem oppoſitum, junctaque BH occurret ipſi CD producto ad partes C. Si autem ratio HK ad HL eadem fuerit rationi DQ ad CR, erit juncta BH parallela ipſi CD.



Primo

Digitized by Google

Primo ſit punctum H intra angulum GBD vel intra oppoſitum ei ad verticem, et occurrat HK rectae BG in M puncto, a quo ad BD ducatur MN parallela ipſi HL, et juncta KN occurrat HL in O. Eſt igitur ratio HK ad HL major ratione HK ad HO, hoc eſt ratione KM ad MN, hoc eſt ratione DQ ad CR.

Et ſi punctum H fuerit intra angulum GBE ſimiliter omnino oſtendetur ratio HK ad HL minor ratione DQ ad CR.

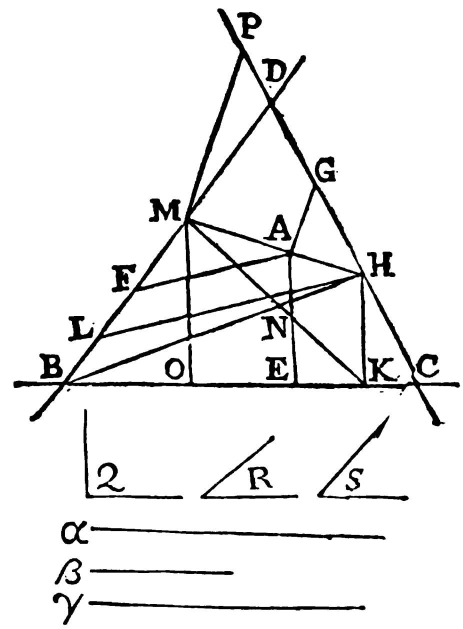
Et contra, ſi ratio HK ad HL major fuerit ratione DQ ad CR, exiſtente puncto H intra exteriorem trianguli angulum vel ei ad verticem oppoſitum; erit H intra angulum GBD. non enim, ſed ſi fieri poteſt ſit punctum H vel in recta BG vel intra reliquum angulum GBE, vel ei ad verticem oppoſitum. Eſſet igitur in primo caſu, per Lemma praecedens, ratio HK ad HL eadem rationi DQ ad CR, in altero autem caſu eſſet minor ratione DQ ad CR. Eſt autem ratio HK ad HL major ratione DQ ad CR; ergo punctum H eſt intra angulum GBD, et propterea juncta BH occurret lateri CD producto verſus partes D. ſimiliter oſtendentur converſae reliquae.

Digitized by Google

Prop. XXVIII

Quando poſitione datae ſunt tres rectae non omnes inter ſe parallelae neque per idem punctum tranſeuntes, caeteris ut in Propoſitione 26. manentibus.

A puncto A ad tres poſitione datas BC, BD, CD, ductae ſint tres rectae AE, AF, AG in angulis AEB, AFD, AGC qui datis angulis ad Q, R, S aequales ſunt. Sitque rectangulum contentum AE et data rectâ α, aequale contento AF et data rectâ β, una cum contento AG et data rectâ γ. Tanget punctum A rectam poſitione datam.



Cas. 1. Quando punctum A eſt intra triangulum BCD rectis poſitione datis comprehenſum.

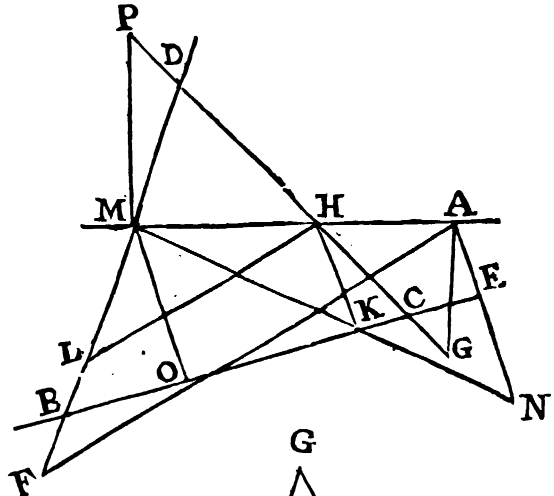
Manifeſtum eſt ſi locus punctorum A, cujuſcunque generis fuerit, occurrat rectae CD in puncto quodam H, et ducantur ad BC, BD rectae HK, HL ipſis AE, AF parallelae, fore rectangulum HK, α aequale ipſi HL, β; nam quoniam punctum H eſt in ipſa CD, nulla poterit ab eo recta duci ad CD: Et contra, ſi fuerit punctum H in recta CD quod faciat rectangulum HK, α aequale ipſi HL, β, ſeu, quod idem eſt, quod faciat HK ad HL in data ratione quam habet β ad α, fore punctum illud H in loco quaeſito. Semper autem poterit punctum H, quod hoc efficiet inveniri in recta CD; nam, per corollarium Prop. 23. recta quae locus eſt punctorum intra angulum CBD, a quorum quovis ſi ducantur ad BC, BD duae rectae in datis angulis Q, R, ductae inter-

inter ſe habebunt rationem datam β ad α, tranſit per punctum B, adeoque neceſſario occurret ipſi CD. Sit haec recta BH occurratque CD in H; datum igitur eſt punctum H; et ductis ad BC, BD rectis HK, HL parallelis ipſis AE, AF; erit HK, ad HL ut β ad α, et rectangulum HK, α aequale erit ipſi HL, β. Jungatur AH, occurratque ipſi BD in M; juncta autem KM occurrat AE in N; et ad BC, CD ducantur MO, MP ipſis AE, AG parallelae. Eſt igitur, propter parallelas, AN ad HK, ut (AM ad MH, hoc eſt ut) AF ad HL; quare et rectangulum AN, α eſt ad HK, α; ut AF, β ad HL, β. Et oſtenſum eſt HK, α aequale ipſi HL, β; ergo et AN, α aequale eſt rectangulo AF, β. Eſt autem, ex hypotheſi, rectangulum AE, α aequale ipſis AF, β; AG, γ ſimul; ergo reliquum NE, α reliquo AG, γ eſt aequale. Et propter parallelas eſt NE ad MO, ut (NK ad MK, hoc eſt ut AH ad MH, hoc eſt ut) AG ad MP. quare eſt rectangulum NE, α ad MO, α ut AG, γ ad ipſum MP, γ; aequalia autem oſtenſa ſunt NE, α; AG, γ; aequalia igitur ſunt MO, α; MP, γ. et propterea eſt MO ad MP, ut γ ad α, hoc eſt in ratione data. Quoniam igitur a puncto M ad duas poſitione datas BC, CD inter ſe convenientes ductae ſunt MO, MP in datis angulis, datamque habentes rationem; tanget punctum M rectam poſitione datam per Prop. 23. hujus; idem vero tangit rectam BD poſitione datam; quare datum eſt punctum M; et datum oſtenſum eſt H; ergo recta HM poſitione data eſt; et propterea tangit punctum A rectam poſitione datam.

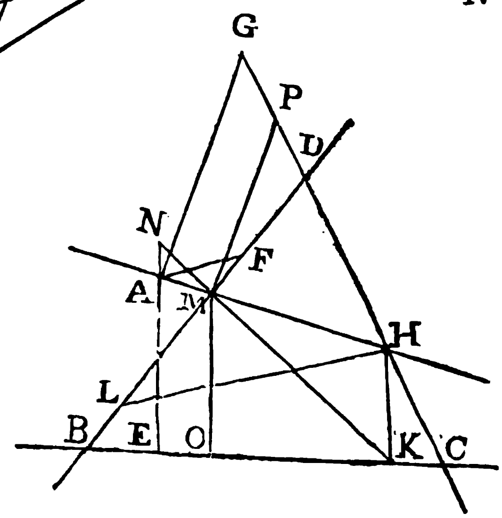
Componetur vero ita.

Inveniatur ope Prop. 23. recta BH intra angulum CBD, quae Locus eſt punctorum a quorum quovis H ductae ad BC, BD duae rectae HK, HL in angulis ipſis Q, R, aequalibus, rationem habeant eandem quam habet β ad α; hoc eſt quae faciant rectangulum HK, α aequale ipſi HL, β. Et occurrat BH ipſi CD in H. Similiter, intra angulum BCD inveniatur recta CM a cujus quovis puncto M ductae ad BC, CD duae rectae MO, MP in angulis ipſis Q, S aequalibus faciant rectangulum MO, α aequale ipſi MP, γ. occurratque CM ipſi BD in M: jun-

M: juncta HM erit Locus quaeſitus : hoc eſt ſi a quovis in ipſa puncto A intra angulum BDC, ducantur ad BC, BD, CD rectae AE, AF, AG in datis angulis, erit rectangulum AE, α aequale ipſis AF, β; AG, γ ſimul. Jungatur enim MK quae occurrat AE in N. Eſt igitur, propter parallelas, et per 1. 6. rectangulum AN, α ad HK, α; ut AF, β ad HL, β. Et ex conſtructione aequalia ſunt HK, α; HL, β; quare aequalia ſunt AN, α; AF, β. Eſt etiam propter parallelas et per 1. 6. NE, α ad MO, α; ut AG, γ ad MP, γ: et ex conſtructione aequalia ſunt MO, α; MP, γ; quare aequalia ſunt NE, α; AG, γ. et aequalia oſtenſa ſunt AN, α; AF, β; ergo additis aequalibus erit rectangulum AE, α aequale ipſis AF, β; AG, γ.



Si autem a quovis puncto A in ea parte rectae HM productae quae eſt intra angulum qui deinceps eſt ipſi BCD, ducantur ad BC, BD, CD rectae AE, AF, AG in datis angulis; quoniam in hoc caſu eſt AE exceſſus rectae AN ſupra NE; erit rectangulum AE, α exceſſus ipſius AF, β ſupra ipſum AG, γ.



Si vero a puncto A in quavis aliâ parte rectae HM ducantur AE, AF, AG ut dictum eſt; erit rectangulum AE, α exceſſus ipſius AG, γ ſupra AF, β. quae omnino ut in praecedente compoſitione oſtendentur.

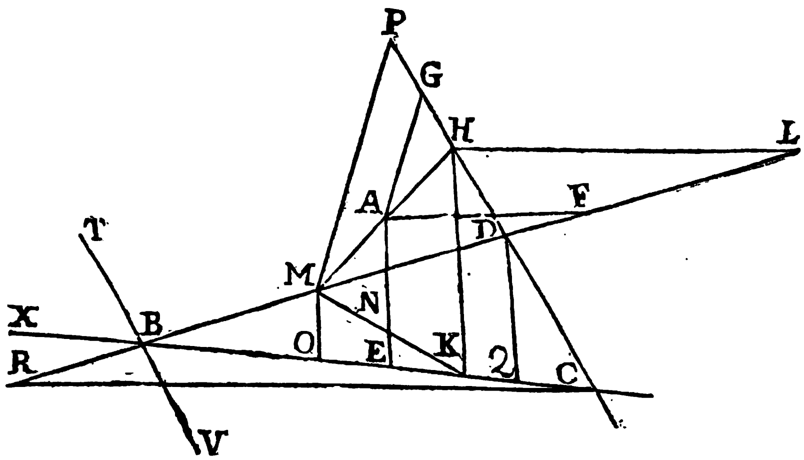
Hic

Digitized by Google

Hic autem caſus primus in quo ſc. puncta H, M ſunt in ipſis trianguli lateribus CD, BD nullam habet determinationem.

Cas. 2. Quando recta HM, in qua eſt Locus quaeſitus, occurrit uni laterum BD, DC trianguli BCD, puta ipſi BD in M, alteri vero CD producto ultra D in H.

Caſus hic (ut et qui ſequuntur omnes praeter ultimum) eodem modo oſtenditur quo primus. quoniam vero requiritur ut punctum H ſit in CD producta ultra D; ſi per B ducatur recta TBV parallela ipſi CD, erit H intra angulum TBD; ductiſque

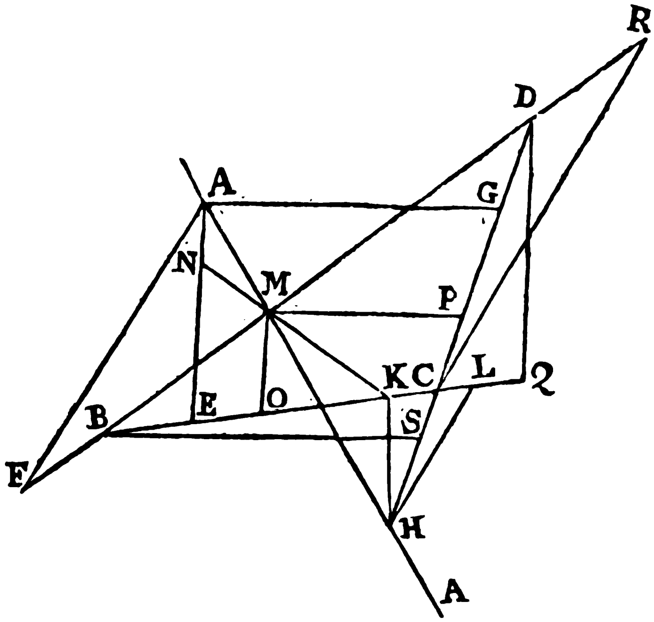


HK, HL in datis angulis ad BC, BD; ad eaſdem ducantur DQ, CR ipſis HK, HL parallelae, et per Lemma 4. erit ratio HK ad HL major ratione DQ ad CR; eſt autem HK ad HL, ut β ad α, ut in praecedente dictum fuit; quare ratio β ad α major eſt ratione DQ ad CR; quae eſt determinatio hujus caſus. Si igitur ſit ratio β ad α major ratione DQ ad CR, et inveniatur intra angulum XBD, qui deinceps eſt ipſi CBD, recta BH, a cujus quovis puncto ductae ad BC, BD rectae, ipſis DQ, CR, parallelae, eandem habent rationem quam β ad α; neceſſario occurret recta haec ipſi CD productae ultra D, per Lem. 4. Occurrat ei in H, et inventâ recta CM prorſus ut in praecedente, juncta HM erit Locus quaeſitus; quod omnino ut in praecedente oſtendetur. ut et quid eveniet ſi ſumatur punctum A in recta HM ad utramvis partem productâ.

Cas. 3.

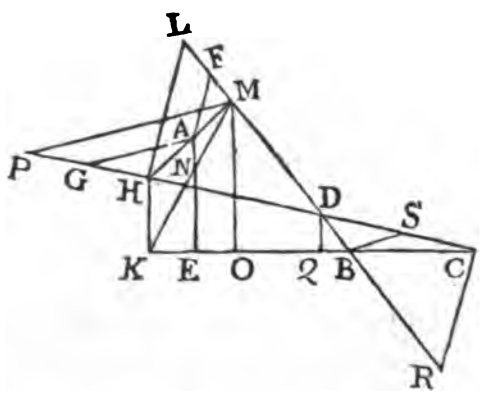
Digitized by Google

Cas. 3. Quando recta HM occurrit uni laterum BD in M, alteri vero CD producto ultra C in H, nihil differt a 2do, niſi quod hic ratio β ad α minor debet eſſe ratione D Q ad C R per Lem. 4. Tota autem recta H M producta ad utraſvis partes, excepta parte ipſius inter puncta H, M, erit Locus quaeſitus.



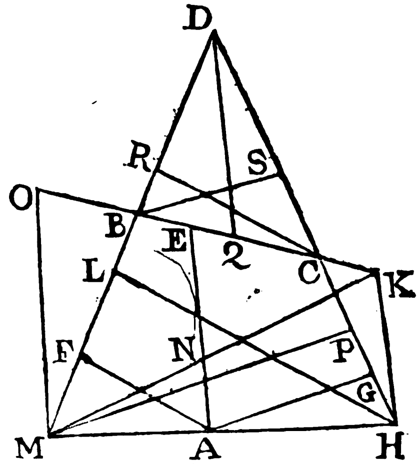
Cas. 4. Quando recta HM occurrit utriſque lateribus BD, CD ultra D productis.

Hic quoniam punctum H requiritur eſſe in C D producta ultra D, debet ratio β ad α major eſſe ratione DQ ad CR, ut in caſu ſecundo oſtenſum fuit. Et ad CD ductâ BS ipſi MP ſeu AG parallelâ, ſimiliter per Lem. 4. oſtendetur rationem γ ad α majorem debere eſſe ratione DQ ad BS. Et ſi obtineant hae duae conditiones, et ducatur recta BH ut in caſu ſecundo, et eodem modo ducatur CM intra angulum qui deinceps eſt ipſi BCD; erunt H, M, puncta in lateribus CD, BD productis ultra D; Junctaque HM erit Locus quaeſitus.



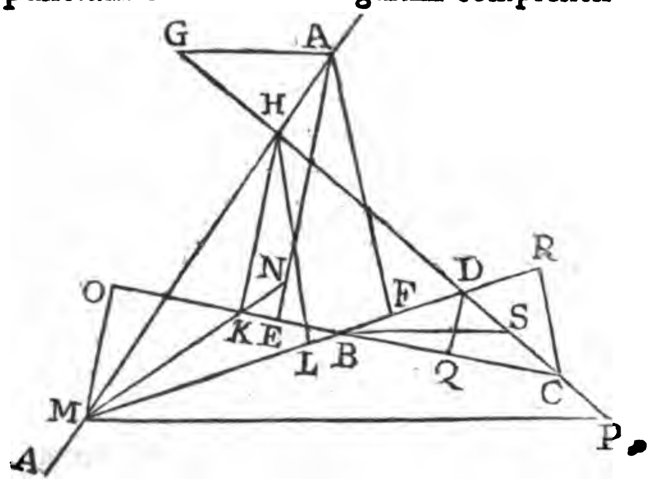
Cas.

Cas. 5. Quando recta HM occurrit utriſque lateribus CD, BD ultra baſim BC productis, nihil differt a 4to, niſi quod ratio β ad α minor debet eſſe ratione DQ ad CR, et ratio γ ad α minor ratione DQ ad BS. Ductiſque BH, CM, intra angulos qui deinceps ſunt ipſis CBD, BCD, erit juncta HM Locus quaeſitus.



Cas. 6. Quando HM occurrit uni laterum, puta ipſi CD, producto ultra D; alteri vero DB producto ultra baſim BC.

In hoc caſu, quoniam punctum H eſt intra angulum comprehenſum latere DB et rectâ quae per B parallela ducta eſt ipſi CD, debet ratio β ad α major eſſe ratione DQ ad CR. et quoniam punctum M eſt intra angulum contentum baſi BC et rectâ quae per C parallela ducta eſt ipſi BD, debet ratio γ ad α minor eſſe ratione DQ ad BS, ut conſtat ex Lem. 4. ductiſque BH, CM intra angulos qui deinceps ſunt ipſis CBD, BCD, junctâque HM et productâ ad utraſque partes; erit tota HM, excepta parte ipſius inter puncta H, M, Locus quaeſitus.

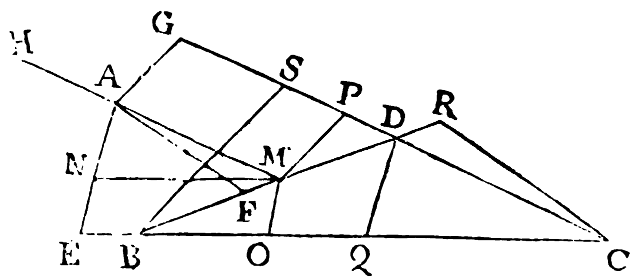


Cas. 7. Quando recta HM, in qua ſc. eſt Locus, parallela eſt uni laterum BD, CD, puta ipſi CD. poterit autem HM occurrere vel reliquo lateri BD, vel ipſi ad utramvis partem producto.

Primo occurrat HM ipſi BD in M, ductiſque AE, AF, AG in da-

Digitized by Google

tis angulis ut in primo caſu, erit ex hypotheſi rectangulum AE, α aequale ipſis AF, β; AG, γ. Et quoniam punctum M eſt in recta BD, ſi ab eo ad BC, CD ducantur MO, MP parallelae ipſis AE, AG, erit rectangulum MO, α aequale MP, γ; hoc eſt (ductâ MN parallelâ ipſi BC quae occurrat AE in N) erit NE, α aequale ipſi AG, γ; ergo reliquum AN, α aequale erit reliquo AF, β; quare eſt AN ad AF, ut β ad α. Ductis autem DQ, CR parallelis ipſis AN, AF; erit per Lem. 3. AN ad AF, ut DQ ad CR; quare et β eſt ad α, ut DQ ad CR. Ut igitur recta HM parallela ſit ipſi CD, neceſſe eſt proportio haec obtineatur. ſit ita, et inveniatur CM ut in primo caſu, occurratque ipſi BD in M, et per M ducatur recta parallela ipſi CD, erit haec Locus quaeſitus. Ducantur enim a puncto quovis in ipſa intra angulum qui deinceps eſt ipſi BDC, rectae AE, AF, AG, quarum AE occurrat MN quae parallela eſt ipſi BC in N; eſt igitur per Lem. 3. AN ad AF, ut DQ ad CR, hoc eſt, ex hypotheſi, ut β ad α. quare rectangulum AN, α aequale eſt ipſi AF, β. Et ex conſtructione (qua ſc. inventum fuit punctum M) eſt MO, α aequale rectangulo MP, γ; hoc eſt rectangulum NE, α aequale eſt ipſi AG, γ. ergo additis aequalibus eſt rectangulum AE, α aequale ipſis AF, β; AG, γ.



Si autem requiratur ut recta HM occurrat BD productae ad partes D, debet ratio γ ad α major eſſe ratione DQ ad BS, ducta ſc. BS parallela ipſi MP. ut vero occurrat HM rectae BD productae ad partes B debet ratio γ ad α minor eſſe ratione DQ ad BS ut ex Lem. 4. conſtat. In utroque vero caſu debet praeterea eſſe β ad α, ut DQ ad CR. Quando autem punctum M eſt in BD ad partes D producta, pars ipſius HM quae eſt intra angulum ipſi BDC ad verticem oppoſitum eſt Locus quaeſitus. Si vero M ſit in BD producta ad partes B, Locus erit

Digitized by Google

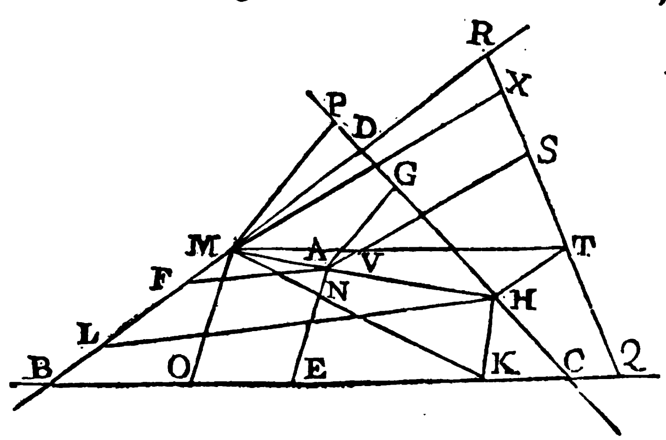
erit ea pars rectae HM quae eſt intra angulum comprehenſum recta BC, et recta BD producta ultra BC. caetera omnino ut in prima parte hujus caſ. 7.

Caſus autem in quo duae ex tribus poſitione datis rectis ſunt inter ſe parallelae ſimiliter oſtendentur; et Locus in quolibet ipſorum invenietur ut in praemiſſis, ope ſc. Prop. 23. et nonnunquam Prop 22. hujus.

Prop. XXIX.

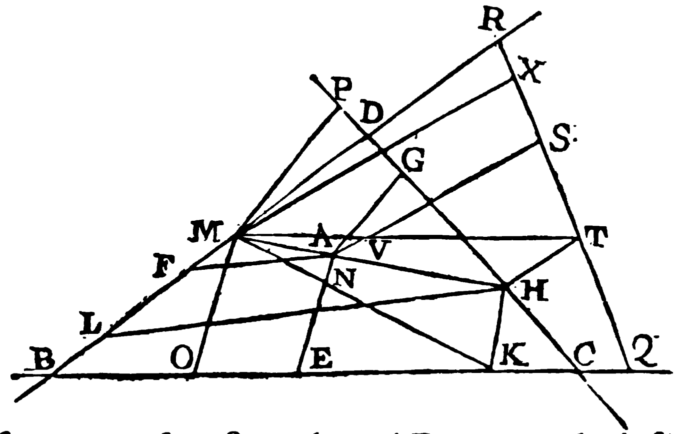
Si ſint quatuor rectae lineae poſitione datae non omnes inter ſe parallelae, et ad ipſas a quodam puncto ducantur rectae lineae in datis angulis; ſit vero rectangulum contentum data recta et una ex ductis aequale rectangulis contentis reliquis ductis et totidem datis rectis; vel ſint rectangula contenta duabus ex ductis et datis rectis, ſimul aequalia rectangulis contentis reliquis ductis et datis rectis: Tanget, in utroque caſu, punctum rectam poſitione datam.

A puncto A ductae ſint ad quatuor rectas poſitione datas BC, BD, CD, QR rectae AE, AF, AG, AS in datis angulis AEB, AFD, AGC, ASR; ſitque primo rectangulum contentum AE et data recta α aequale rectangulis AF, β; AG, γ; AS, δ; datis ſc. rectis β, γ, δ: tanget punctum A rectam poſitione datam.



Sit H punctum in quo Locus punctorum A occurrit rectae

CD, et ad BC, BD, QR ducantur HK, HL, HT ipſis AE, AF, AS parallelae; igitur, ex hypotheſi, rectangulum HK, α aequale erit ipſis HL, β; HT, δ. quare, per praecedentem Propoſitionem, punctum H tangit rectam poſitione datam; idem vero tangit aliam rectam CD poſitione datam; datum igitur eſt punctum H. Jungatur AH occurratque ipſi BD in M; et junctae MK, MT occurrant ipſis AE, AS, in N, V punctis; et ad BC, CD, QR ducantur rectae MO, MP, MX parallelae ipſis AE, AG, AS. Quoniam igitur propter parallelas eſt HK ad AN, ut HL ad AF, et ut HT ad AV; et eſt rectangulum HK, α aequale ipſis HL, β; HT, δ; erit per Lem. 2. rectangulum AN, α aequale ipſis AF, β; AV, δ: ex hypotheſi autem eſt rectangulum AE, α aequale ipſis AF, β; AG, γ; AS, δ; ergo reliquum rectangulum NE, α aequale eſt ipſis AG, γ; VS, δ. Eſt vero NE ad MO, ut AG ad MP; quod in praecedente propoſitione oſtenſum fuit; et praeterea propter parallelas eſt AG ad MP, ut (AH ad MH, hoc eſt ut VT ad MT, hoc eſt ut) VS ad MX; quare eſt NE ad MO, ut AG ad MP, et ut VS ad MX. Et quoniam rectangulum NE, α aequale oſtenſum eſt ipſis AG, γ; VS, δ; erit per Lemma 2. MO, α aequale ipſis MP, γ; MX, δ. Ergo per Prop. 28. tangit punctum M rectam poſitione datam; idem vero tangit aliam rectam BD poſitione datam; datum igitur eſt punctum M; et datum oſtenſum eſt H; ergo punctum A tangit rectam HM poſitione datam.



Componetur vero ita.

Inveniatur ope Propoſitionis praecedentis Recta quae Locus eſt punctorum a quorum quovis ſi ducantur rectae in datis angulis ad ipſas BC,

BC, BD, QR, rectangulum contentum ductâ ad BC et data rectâ α aequale ſit contento ductâ ad BD et datâ β, una cum contento ductâ ad QR et datâ δ. Occurrat recta inventa ipſi CD in puncto H et ducantur ad praedictas rectas in datis angulis HK, HL, HT. Eſt igitur rectangulum HK, α aequale ipſis HL, β; HT, δ. Similiter inveniatur in recta BD punctum M, a quo ductae in datis angulis ad ipſas BC, CD, QR rectae MO, MP, MX faciant rectangulum MO, α aequale ipſis MP, γ; MX, δ; erit juncta HM Locus quaeſitus; hoc eſt ſi a quovis in ipſa puncto A ducantur ad BC, BD, CD, QR quatuor rectae AE, AF, AG, AS in datis angulis rectangulum AE, α aequale erit rectangulis AF, β; AG, γ; AS, δ. Junctae enim MK, MT occurrant ipſis AE, AS in N, V punctis; et quoniam in eadem ratione ſunt HK ad AN, HL ad AF et HT ad AV; et ex conſtructione, eſt rectangulum HK, α aequale ipſis HL, β; HT, δ; erit per Lem. 2. rectangulum AN, α aequale ipſis AF, β; AV, δ. Et quoniam in eadem ratione ſunt NE ad MO, AG ad MP, et VS ad MX, ut prius oſtenſum; et, ex conſtructione, eſt MO, α aequale ipſis MP, β; MX, δ; erit per Lem. 2. rectangulum NE, α aequale AG, γ; VS, δ. Et fuit AN, α aequale ipſis AF, β; AV, δ. Ergo, additis aequalibus, erit AE, α aequale ipſis AF, β; AG, γ; AS, δ.

2do. Sit jam rectangulum AE, α una cum AF, β aequale ipſis AG, γ; AS, δ, reliquis ut in praecedente manentibus; tanget punctum A rectam poſitione datam.

Sit H punctum in quo Locus occurrit rectae CD, et ad BC, BD, QR ductis HK, HL, HT ipſis AE, AF, AS, parallelis, erit ex hypotheſi, HK, α rectangulum una cum HL, β aequale ipſi HT, δ; quare per Prop. 28. tangit punctum H rectam poſitione datam, idem autem tangit aliam rectam CD poſitione datam; datum igitur eſt punctum H. Iiſdemque, ut in primo caſu, conſtructis erit HK ad AN, ut HL ad AF, et ut HT ad AV; et quoniam rectangula HK, α; HL, β ſimul aequalia ſunt ipſi HT, δ; per Lem. 3. erunt et AN, α; AF, β ſimul aequalia ipſi AV, δ. ſunt autem ex hypotheſi AE, α; AF, β ſimul aequalia ipſis AG, γ; AS, δ; ergo reliquum NE, α aequale eſt reliquo ſc. ipſis

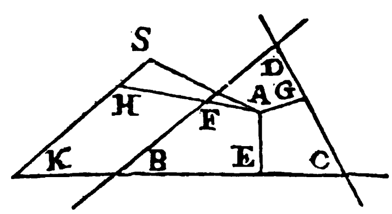
AG,

AG, γ; VS, δ. Et quoniam, ut in praecedente oſtenſum, in eadem ratione ſunt NE ad MO, AG ad MP, VS ad MX; erit per Lem. 3. MO, α aequale ipſis MP, γ; MX, δ. Ergo datum eſt punctum M; et datum oſtenſum eſt H; quare punctum A tangit rectam poſitione datam.

Componetur vero ita.

Inveniatur per Prop. 28. punctum H in recta CD quod faciat rectangulum HK, α una cum HL, β aequale ipſi HT, δ. Similiter in recta BD inveniatur punctum M quod faciat MO, α rectangulum aequale ipſis MP, γ; MX, δ. Erit juncta HM Locus quaeſitus; hoc eſt, ſi ducantur AE, AF, AG, AS ut dictum eſt, erunt rectangula AE, α; AF, β ſimul aequalia ipſis AG, γ; AS, δ. Iiſdem enim ut in praecedente conſtructis, quoniam in eadem ratione ſunt HK ad AN, HL ad AF, HT ad AV; et ex conſtructione rectangulum HK, α una cum HL, β aequale eſt ipſi HT, δ, erunt et AN, α; AF, β ſimul aequalia ipſi AV, δ per Lem. 3. Et quoniam in eadem ratione ſunt NE ad MO, AG ad MP, VS ad MX; et eſt MO, α rectangulum aequale ipſis MP, γ; MX, δ; erit per Lem. 3. NE, α aequale ipſis AG, γ; VS, δ. Ergo, additis aequalibus, erunt rectangula AE, α; AF, β ſimul aequalia ipſis AG, γ; AS, δ.

Cor. I. Et ſi rectangula contenta una ex ductis, vel quibuſdam ex ductis et datis rectis non aequalia fuerint rectangulis contentis reliquis ductis et datis rectis, verum ad ipſa ſimul ſumpta datam habuerint rationem; tanget, et in hac hypotheſi, punctum a quo rectae ducuntur, rectam poſitione datam. *Ex. gr.* in caſu quatuor rectarum.



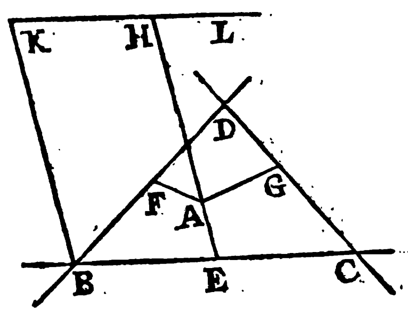
Sit rectangulum AE, α una cum AF, β ad AG, γ una cum AS, δ in data ratione; in hac ratione ſit ε ad γ, et ζ ad δ; et in eadem erit rectangulum AG, ε ad AG, γ; et AS, ζ ad ipſum AS, δ; et per 12. 5. in eadem ratione erit AG, ε ſimul cum AS, ζ ad

Digitized by Google

ζ ad AG, γ ſimul cum AS, δ. ergo rectangula AE, α; AF, β ſimul aequalia erunt ipſis AG, ε; AS, ζ. quare per hanc propoſitionem tangit punctum A rectam poſitione datam. Compoſitio autem manifeſta eſt.

Cor. II. Et ſi rectangula omnia ſimul ſumpta aequalia ſint ſpatio dato, tanget punctum A rectam poſitione datam.

A puncto A ad poſitione datas BC, BD, CD, &c. ducantur rectae AE, AF, AG, &c. in datis angulis, et ſint omnia rectangula AE, α; AF, β; AG, γ, &c. ſimul aequalia ſpatio dato; ſit ſpatium hoc aequale rectangulo EH, α, productâ ſc. EA ad H; et quoniam datum eſt EH, α, et data eſt recta α, dabitur EH magnitudine; et data eſt poſitione BC, datuſque eſt angulus HEB; ergo tangit punctum H rectam poſitione datam ipſi BC parallelam [20. huj.] ſit haec HK; et quoniam ex hypotheſi rectangula AE, α; AF, β; AG, γ, &c. ſimul aequalia ſunt ipſi EH, α; ablato communi rectangulo AE, α; erunt AF, β; AG, γ, &c. ſimul aequalia ipſi AH, α. Ergo per hanc propoſitionem tangit punctum A rectam poſitione datam.



Componetur vero ita.

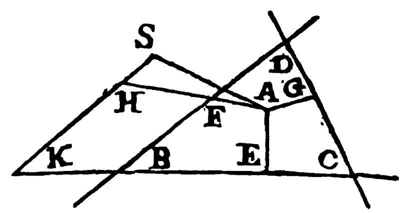
A quovis in recta BC puncto ducatur recta ipſi AE parallela, et in ipſa ſumatur BK quod faciat rectangulum BK, α aequale ſpatio dato. et per K ducatur KL ipſi BC parallela; ducatur etiam, per hanc propoſitionem, recta linea quae Locus ſit punctorum a quorum quovis ſi ducantur rectae ad poſitione datas KL, BD, DC, &c. in datis angulis, rectangulum contentum ductâ ad KL et rectâ α aequale ſit omnibus contentis reliquis ductis et reliquis datis rectis β, γ, &c. ſimul; erit haec Locus quaeſitus. A quovis enim, in Loco, puncto A ducantur AH, AF, AG, &c. in datis angulis; et quoniam ex constructione eſt AH, α aequale

α aequale ipſis AF, β; AG, γ, &c. addito communi AE, α; erunt AE, α; AF, β; AG, γ, &c. ſimul aequalia ipſi EH, α hoc eſt ſpatio dato.

Si fuerint α, β, γ, &c. inter ſe aequales, erunt AE, AF, AG, &c. ſimul aequales rectae EH magnitudine datae. unde in hoc caſu Corollarium vertitur in hunc Locum ſc. ſi a puncto A ad poſitione datas BC, BD, CD, &c. ducantur rectae AE, AF, AG, &c. in datis angulis, fuerintque ductae, omnes ſimul, aequales datae rectae EH; tanget punctum A rectam poſitione datam. Et ſimiliter quum fuerint tres vel duae rectae poſitione datae.

Cor. III. Et ſi quaedam ex rectangulis ſimul ſumpta majora ſint reliquis ſimul ſumptis ſpatio dato, tanget adhuc punctum a quo rectae ducuntur rectam poſitione datam.

Sint rectangula AE, α, &c. aequalia ipſis AF, β; AG, γ, &c. ſimul cum ſpatio dato; et productâ AF, in ipſa ſumatur FH quod faciat rectangulum FH, β aequale ſpatio dato, quare punctum H tanget rectam poſitione datam, ut in Cor. 2. oſtenſum. Et quoniam ex hypotheſi rectangula AE, α, &c. aequalia ſunt ipſis AF, β; AG, γ; &c. una cum FH, β; hoc eſt ipſis AH, β; AG, γ, &c. tanget punctum A rectam poſitione datam, per hanc Propoſitionem; eademque eſt Compoſitio, inventâ ſc. recta KH ut in praecedente corollario.



Cor. IV. Denique, ſi quaedam ex rectangulis ſimul ſumpta majora vel minora ſint reliquis ſimul ſumptis dato, quam in ratione; vel ſi quaedam ex iis una cum eo ad quod reliqua ſimul ſumpta datam habent rationem, data ſimul fuerint; tanget punctum a quo rectae ducuntur rectam poſitione datam.

Sit rectangulum AE, α una cum AF, β majus rectangulo AG, γ una cum AS, δ dato, quam in ratione; ſitque datum ſpatium Z; ablato

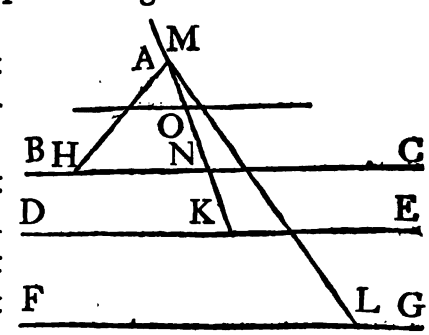
Digitized by Google

to igitur ſpatio Z, erit exceſſus AE, α una cum AF, β ſupra Z ad AG, γ una cum AS, δ in ratione data. In hac ſit ε ad γ, et ζ ad δ. Et ut in cor. 1. oſtendetur exceſſus ipſorum AE, α, AF, β ſupra Z aequalis rectangulis AG, ε; AS, ζ; ſimul. Et propterea per Cor. 3. tangit punctum A rectam poſitione datam. Similiter oſtendetur Caſus 2^{dus} et 3^{tius} qui quidem ope Coroll. 2^{di} perficietur.

Eodem prorſus modo ſi fuerint quinque rectae poſitione datae, Locus in hac propoſitione (ut et Loci in Corollariis ejuſdem) invenietur et Compoſitio fiet ope Loci ad quatuor rectas, ſive unum rectangulum aequale fuerit reliquis, ſive duo aequalia fuerint tribus. et ſimiliter Locus ad ſex rectas invenietur ope Loci ad quinque, et ita deinceps quotcunque fuerint rectae.

Quoniam vero Propoſitiones hae, ipſiſque ſimiles, in quibus ſc. numerus rectarum datarum poterit ſine fine augeri, prolixae admodum evadunt; praeſtat in hoc caſu oſtendere quomodo a dato quovis numero rectarum progrediatur ad numerum proxime majorem; ut in hac et praecedente factum fuit; non autem in caſu parallelarum, ſc. in Prop. 26ta. Utrique autem caſui, parallelarum et non parallelarum, Propoſitio quae ſequitur aeque inſerviet.

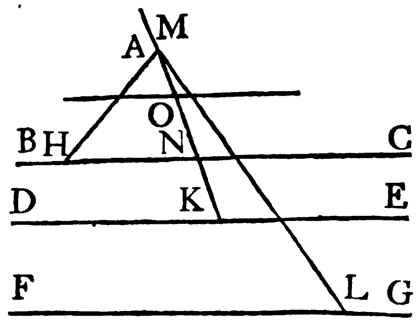
A puncto A ad poſitione datas BC, DE, FG, &c. ductae ſint rectae AH, AK, AL, &c. in datis angulis, ſitque rectangulum contentum AH et data rectâ α aequale contento AK et data recta β, una cum contento AL et data recta γ &c. tanget punctum A rectam poſitione datam.

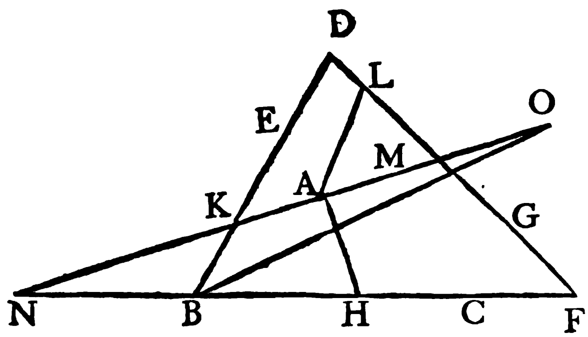


Producatur enim KA ad M ita ut rectangulum KM, β aequale ſit ipſi AH,α, hoc eſt ipſis AK,β; AL,γ, &c. et ablato communi rectangulo AK, β, erit reliquum AM, β, aequale reliquo, rectangulis ſc. AL, γ, &c. Et quoniam rectangulum AH, α, aequale eſt ipſi KM,β, erit α ad β, ut KM ad AH; data igitur eſt ratio KM ad AH. Occurrat AM ipſi BC in N, et quoniam ſpecie datum eſt triangulum

Digitized by Google

AHN, dabitur ratio AH ad AN; data igitur erit [8. dat.] ratio KM ad AN. Sit ut KM ad NA, ita OM ad OA, et ita [per 19. 5. aut 12. 5.] erit KO ad ON; igitur data eſt ratio KO ad ON, et propterea data eſt ratio KN ad NO. Si igitur BC, DE inter ſe parallelae fuerint, quoniam inter ipſas ducta eſt NK in angulo dato, erit NK magnitudine data [32. dat.], quare magnitudine dabitur NO ad quam NK datam habet rationem, et data eſt recta BC poſitione, datuſque eſt angulus BNO; ergo tangit punctum O rectam poſitione datam ipſi BC parallelam [20 hujus.]. Si autem BC, DE inter ſe non fuerint parallelae, occurrant ſibi mutuo in B, et quoniam ſpecie datum eſt triangulum NBK, dabitur ratio KN ad NB, et data oſtenſa eſt ratio KN ad NO, ergo [8. dat.] data erit ratio BN ad NO, data autem eſt BN poſitione, et punctum B, anguluſque BNO datus eſt, quare tangit punctum O rectam poſitione datam per caſum 1. Prop. 23. hujus.





Et quoniam in utroque caſu data oſtenſa eſt ratio KM ad NA, hoc eſt ratio OM ad OA, dabitur ratio MA ad AO; in hac ratione fiat quaedam δ ad datam β, et magnitudine dabitur recta δ. erit autem rectangulum contentum AO, δ aequale ipſi MA, β, hoc eſt rectangulis AL, γ, &c. Quotcunque igitur rectae poſitione datae fuerint in hypotheſi propoſitionis, deductus nunc erit Locus ad numerum rectarum unitate minorem numero earum ab initio propoſitarum, et ſimilem analyſin repetendo quoties neceſſe fuerit, deducetur ad caſum in quo duae tantum

Digitized by Google

tum rectae poſitione datae erunt; et propterea deductus erit ad Propoſitionem 22dam, aut 23tiam, prout hae duae rectae parallelae fuerint, aut inter ſe convenerint. Quoniam igitur Propoſitio in caſu duarum rectarum ſoluta habetur in Prop. 22da. aut 23tia. hujus, ſolvetur per praecedentem in caſu trium rectarum, et ope ſolutionis in hoc caſu, ſolvetur in caſu quatuor rectarum, et ita deinceps.

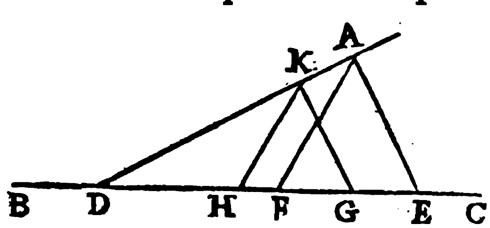
Clariſſimus Fermatius Locum hunc in eo caſu trium rectarum quo duae ex rectis datis, quas β et γ nominavimus, ſunt inter ſe aequales, demonſtratione ſatis perplexa oſtendit, quaeque magis perplexa foret ſi ad caſum in quo nullae ex tribus rectis datis ſunt inter ſe aequales, multo magis ſi ad caſum in quo plures quam tres rectae datae ſunt, quiſpiam eam extendere velit. Calculus autem Algebraicus quem ad Locum hunc inveniendum tradit Schootenius nullius unquam uſus, in ſolutione cujuſpiam problematis ope hujus Loci, futurus eſt.

Prop. XXX.

Si a puncto ad rectam poſitione datam ducantur duae rectae in datis angulis, abſcindantque ex poſitione data ſegmenta dato puncto, vel duobus datis punctis adjacentia, quae datam inter ſe habent rationem; tanget punctum rectam poſitione datam.

Cas. 1. Quando datum eſt unum punctum.

A puncto A ad rectam poſitione datam BC in qua datum eſt punctum D, ductae ſint AE, AF, in datis angulis AED, AFD, et data ſit ratio DE ad DF; tanget A rectam poſitione datam.



Quoniam enim data eſt ratio DE ad DF, dabitur et ratio DE ad EF [5. dat.]; et, propter ſpecie datum [40. dat.] triangulum EAF,

 data

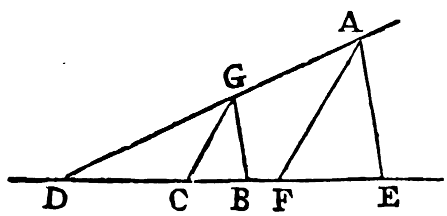
data eſt ratio EF ad EA; quare [8. dat.] data eſt ratio DE ad EA, et datus eſt angulus DEA, ideoque, junctâ DA, triangulum DEA ſpecie datum eſt [41. dat.], et datum eſt D punctum, ergo DA poſitione data eſt [29. dat.].

Componetur ita.

Sumantur quaevis puncta G, H quae faciant rationem DG ad DH eandem rationi datae, et ab ipſis ducantur GK, HK in datis angulis; juncta et producta DK erit Locus quaeſitus. A quovis enim in ipſa puncto A, ducantur ad BC rectae AE, AF parallelae ipſis KG, KH; erit igitur DE ad DG, ut (DA ad DK, hoc eſt ut) DF ad DH; et permutando eſt DE ad DF, ut DG ad DH, hoc eſt in ratione data. Compoſitio autem haec paulo brevior eſt eâ quae fieret ſtricte ſequendo analyſin, ſolet autem hoc evenire quando recta quaedam ad compoſitionem, non vero ad analyſin adhiberi poteſt, qualis hic eſt recta DK.

Cas. 2. Quando data ſunt duo puncta.

Sint puncta B, C data, et ductis a puncto A ad rectam BC, rectis AE, AF in datis angulis, data ſit ratio BE ad CF. Quoniam igitur data ſunt puncta B, C, et in recta BC ſumpta ſunt puncta E, F quae faciunt rationem BE ad CF datam, dabitur aliud punctum D, quod faciet rationem DE ad DF datam; ſc. ſi fiat DB ad DC in data ratione BE ad CF,



nam per 12. aut 19. 5. erit DE ad DF in eadem data ratione. propter datam autem BC dabitur punctum D; quare, per praecedentem caſum, tangit punctum A rectam poſitione datam. et invento puncto D, ut dictum fuit, ductiſque BG, CG in datis angulis, erit juncta et producta DG Locus quaeſitus. Ducantur enim a quovis in ipſa puncto A rectae parallelae ipſis GB, GC; et, ut in praecedente, oſtendetur eſſe DE ad DF, ut DB ad DC. Ergo per 19. aut 12. 5. erit BE ad CF, ut DB ad DC, hoc eſt in ratione data.

Prop.

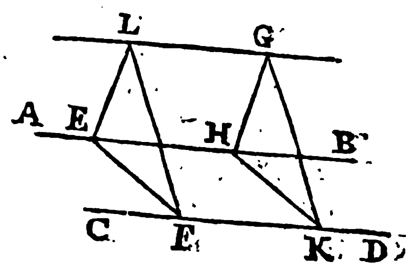
Prop. XXXI.

Si a puncto ad duas poſitione datas rectas, ducantur duae rectae in datis angulis, abſcindantque ex poſitione datis, ſegmenta datis punctis adjacentia, quae datam inter ſe habent rationem: tanget punctum rectam poſitione datam.

Cas. i. Quando rectae poſitione datae ſunt inter ſe parallelae.

Sint AB, CD, poſitione datae, et inter ſe parallelae, et in ipſis data ſint puncta E, F; a puncto vero G ductae ſint ad ipſas rectae GH, GK in datis angulis GHB, GKD abſcindantque ſegmenta EH, FK datam rationem habentia: tanget punctum G rectam poſitione datam.

1mo Sit ratio data aequalis ad aequale; et jungantur EF, HK. Quoniam igitur data ſunt E, F puncta, poſitione et magnitudine dabitur EF. aequales autem et parallelae, ex hypotheſi, ſunt EH, FK; quare et EF, HK; magnitudine igitur data eſt HK. Angulus autem KHB aequalis eſt dato FEB, et ex hypotheſi datus eſt BHG, quare datus eſt angulus KHG. ſimiliter datus erit HKG; quare ſpecie datum erit triangulum GHK; et magnitudine data eſt KH, quare et HG. Quoniam igitur a puncto G, ad poſitione datam AB, ducta eſt GH magnitudine data, in angulo dato GHB; tanget punctum G rectam poſitione datam, et ipſi AB parallelam, per Prop. 20. huj.



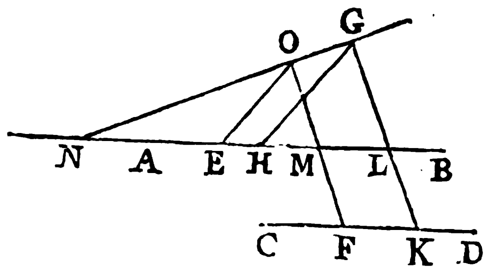
Componetur vero ita.

Juncta EF, ducantur EL, FL in datis angulis, occurrantque ſibi mutuo in L; per L ducatur LG ipſis AB, CD parallela; erit haec Locus quaeſitus. a quovis enim in ipſa puncto G ducantur ad AB, CD rectae GH, GK parallelae ipſis LE, LF; et quoniam parallelogramma ſunt ELGH, GKFL, erit EH aequalis LG, hoc eſt ipſi FK.

2do

Digitized by Google

2do Non autem ſit data ratio aequalis ad aequale, reliquis ut in praecedente manentibus. Occurrat GK ipſi AB in L, et ducatur AB ad FM, parallela ipſi GK. Quoniam igitur aequales ſunt FK, ML, et ex

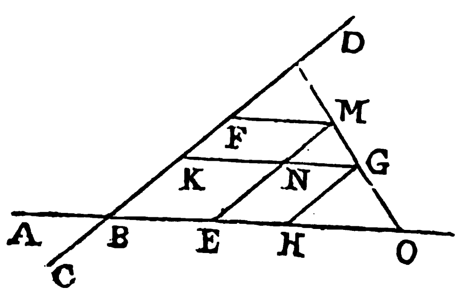


hypotheſi data eſt ratio EH ad FK, dabitur ratio ejuſdem ad ML; poſitione autem data eſt FM quae a dato puncto F, in data poſitione CD, ducta eſt in angulo dato [29. dat.]; et poſitione data eſt AB, quare datum eſt punctum M. quoniam igigitur data ſunt duo puncta E, M in recta AB, et ad eandem ductae ſunt GH, GL in datis angulis, quae abſcindunt ſegmenta EH, ML in data ratione, tangit punctum G rectam poſitione datam per caſ. 2. Propoſitionis praecedentis.

Componetur vero ita.

A puncto F, in recta CD, ducatur ad alteram poſitione datam AB, recta FM in angulo aequali ei quem ducenda ad eandem CD cum ipſâ comprehendere debet; et, ut oſtenſum fuit in caſ. 2. praecedentis, inveniatur recta NO a cujus quovis puncto ductae ad AB in datis angulis abſcindent ſegmenta adjacentia punctis E, M, quae datam habent rationem; erit haec Locus quaeſitus. A quovis enim puncto in eâ G, ducantur GH, GLK ad ipſas AB, CD in datis angulis. Igitur ex conſtructione parallelae ſunt LK, FM, et eſt EH ad ML in data ratione, eſt autem ML aequalis FK, quare et EH eſt in data ratione ad FK.

CAS. II. Quando rectae poſitione datae ſibi mutuo occurrunt.



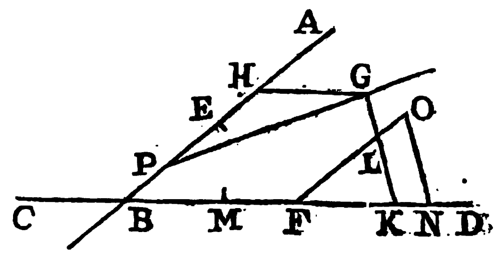
Occurrant poſitione datae AB, CD ſibi mutuo in B; et ad ipſas ductae ſint in datis angulis rectae GH, GK, quae 1mo ipſis CD, AB ſint parallelae, abſcindantque ſegmenta HE, KF datis punctis E, F adjacentia, quae datam habent rationem. Compleatur autem parallelogrammum EBFM, et occurrat

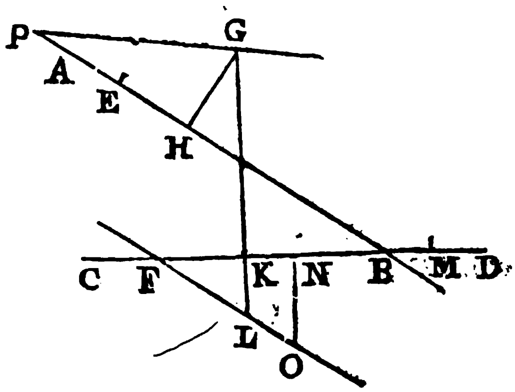
occurrat GK ipſi EM in N. Quoniam igitur EH, KF aequales ſunt ipſis GN, NM, dabitur ratio GN ad NM; et datus eſt angulus MNG, quare, junctâ MG, triangulum GMN ſpecie datum eſt [41. dat.], et datus propterea eſt angulus NMG; poſitione autem data eſt EM, et datum eſt punctum M, ergo recta MG poſitione data eſt, [29. dat.].

Compoſitio manifeſta eſt, completo ſc. parallelogrammo BM, fiat OE ad EM in data ratione, et juncta MO erit Locus quaeſitus. ductis enim GH, GK, ut dictum fuit, a quovis puncto G in MO; erit GN ad NM, hoc eſt EH ad FK, ut OE ad EM, hoc eſt in ratione data.

2do Non ſint utraeque ductae parallelae poſitione datis, reliquis manentibus.

Si una ductarum GH parallela ſit uni ex poſitione datis CD, per datum in hâc punctum F ducatur FL alteri poſitione datae AB parallela; ſi vero neutra ductarum GH, GK parallela ſit uni ex poſitione datis, ducatur per datum punctum F in alterutra ipſarum CD, recta FL alteri AB parallela; occuratque ei GK quae ad CD ducta eſt, in L. poſitione igitur data eſt FL [28. dat.]; et quoniam in triangulo FKL dantur anguli KFL, FKL, dabitur ratio KF ad FL, et data ex hypotheſi eſt ratio EH ad FK, ergo [8. dat.] data eſt ratio EH ad FL. Quoniam igitur ad duas parallelas AB, FL poſitione datas ductae ſunt GH, GL in datis angulis, abſcindentes ſegmenta EH, FL quae datis punctis E, F adjacent, datamque habent rationem, tangit punctum G rectam poſitione datam per caſ. 1. praecedentem.

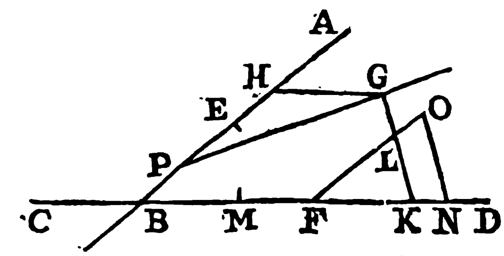


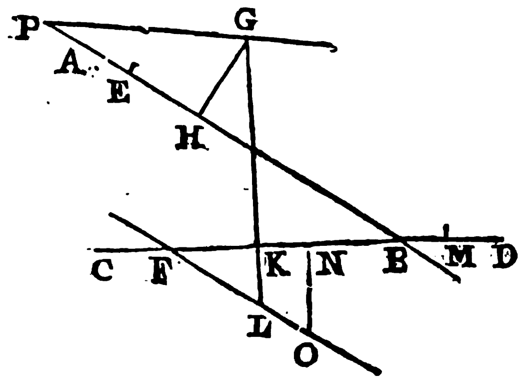


Componetur

Componetur vero ita.

Sit ratio FM ad FN eadem rationi datae quam ſc. habere debet ſegmentum rectae AB ad ſegmentum ipſius CD, et a puncto N ducatur NO parallela ipſi GK; per F vero ducatur FL parallela AB, occurratque NO in O: et ope praecedentis caſus inveniatur recta GP quae Locus eſt punctorum a quorum quovis G ductae GH, GL ad parallelas AB, FO in datis angulis abſcindant ex ipſis ſegmenta EH, FL in data ratione quam habet FM ad FO; abſcindent eaedem GH, GL ex ipſis AB, CD ſegmenta EH, FK quae rationem habebunt eandem datae rationi FM ad FN. Quoniam enim, ex conſtructione, eſt EH ad FL, ut FM ad FO; ut vero FL ad FK, ita eſt FO ad FN; erit ex aequo EH ad FK, ut FM ad FN.

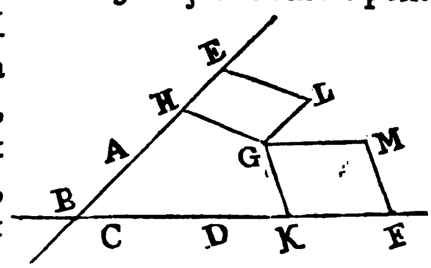




Schootenius huic Loco, in caſu quo rectae poſitione datae ſunt inter ſe parallelae, hanc ſequentem addidit notam in pag. 249 Exercitationum Mathematicarum, viz. "Quamvis haec Propoſitio univerſalis ſit, et in quotcunque rectis lineis parallelis locum obtineat, operae pretium tamen nos facturos exiſtimavimus, ſi ad majorem ejus perfectionem ſequentem operationem hic adjicerimus." dein tradit operationem Algebraicam qua conatur oſtendere Propoſitionem in caſu trium rectarum. Verum hic in craſſum incidit errorem, calculo Algebraico, non accurate inſtituto, deceptus; ſymbolis ſc. ejus calculi majus quam rei ipſi attentus. Si enim a puncto, ad tres poſitione datas rectas parallelas, ducantur tres rectae in datis angulis, abſcindentes, datis punctis adjacentia, tria ſegmenta, quae inter ſe datas habent rationes;

nes; quis non ſtatim percipiet punctum illud, propter duas rectas, modo jam dicto, ductas, tangere rectam poſitione datam? et ſimiliter propter alterutram ex hiſce duabus et tertiam ductam, idem punctum tangere rectam aliam (nam niſi ex accidente non erit eadem cum prima) poſitione datam; et propterea punctum illud datum eſſe, et Propoſitionem non Locum, ſed Problema continere. Si vero plures quam tres parallelae poſitione datae ſint, non poterit inveniri punctum aliquod (niſi ex accidente) propoſito ſatisfaciens. Ex eo autem lapſus eſt Schootenius, quod non viderat rectam CD, ſeu BK quae apud eum deſignatur ſymbolis $\frac{bx-ay}{c}$, poſſe etiam per x–a deſignari: quod ſi feciſſet, nactus fuiſſet aequationem, uti vocant, in qua una tantum ex incognitis x, y locum habuiſſet. Eundem vero errorem ex eodem fonte oriundum, repetit in caſu rectarum concurrentium.

Videtur autem Propoſitio haec 31. Apollonianis a junioribus addita. paululum enim differt a Propoſitione 22. aut 23. hujus. nam ad poſitione datas AB,CD ductae ſint GH,GK in datis angulis, abſcindentes ſegmenta HE, KF datis punctis E, F adjacentia, quae datam inter ſe habent rationem; et compleantur parallelogramma EHGL, FKGM. poſitione igitur datae ſunt EL, FM, et dati ſunt anguli ad L, M,



oppoſitis ſc. ad H, K aequales. quoniam igitur a puncto G ad poſitione datas E L, F M ductae ſunt G L, G M in datis angulis, datamque habentes rationem, (aequales enim ſunt ipſis HE, KF) tanget punctum G rectam poſitione datam per Prop. 22. aut 23. hujus. quoniam vero apud Pappum habetur Propoſitio haec, ſolutionem ipſi propriam dedimus, eique Propoſitionem 30. quae apud Pappum non extat, praemiſimus.

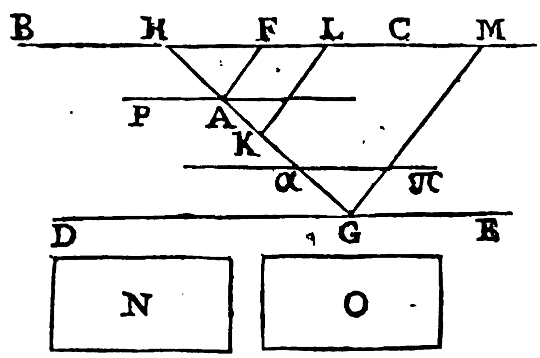
Digitized by Google

Prop. XXXII.

Si a puncto A ducantur ad duas poſitione datas parallelas BC, DE, rectae AF, AG in datis angulis AFB, AGD; fueritque rectangulum GAF ab ipſis contentum aequale dato ſpatio: tanget punctum A rectam poſitione datam.

Cas. I. Quando punctum A eſt inter parallelas.

Occurrat AG ipſi BC in H, et quoniam datus eſt angulus AGD, dabitur ipſi aequalis AHF, et datus eſt AFH, quare ſpecie datum eſt triangulum AFH, [40. dat.]; ideoque data eſt ratio AF ad AH, ſeu ratio rectanguli GAF ad ipſum GAH; et ex hypotheſi datum eſt rectangulum GAF, quare datum erit GAH; et magnitudine data eſt recta GH, [32. dat.]; ergo magnitudine dabitur GA [85. dat.]; et datus eſt angulus AGD, tangit propterea punctum A rectam poſitione datam per Prop. 20. huj.



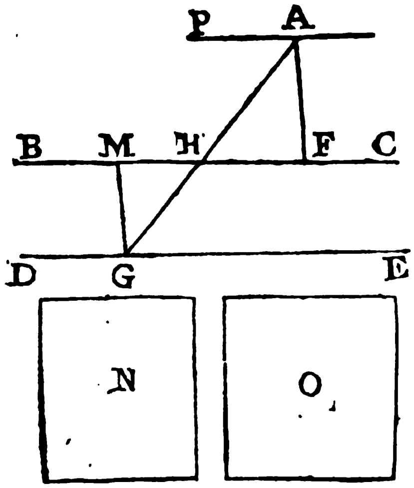
Quoniam vero ad compoſitionem requiritur, ſc. per 85. dat. ut ſpatium datum applicetur ad rectam magnitudine datam GH deficiens quadrato, quod per 27. 6. non fieri poteſt, niſi ſpatium illud datum non majus fuerit quadrato ex dimidio ipſius GH; ideo Locus non ſemper conſtrui poterit. Si vero ſpatium datum, cui aequale debet eſſe rectangulum GAF, tale fuerit ut punctum A cadat in medio ipſius GH, unica erit recta quae Loco ſatisfaciet. Spatium autem quod hoc efficiet invenietur ducendo, a quovis in DE puncto G, ad ipſam BC rectas GH, GM in datis angulis; bifariam enim ſectâ GH in K, et

et ductâ KL ipſi GM parallelâ, ſpatium quaeſitum aequale erit rectangulo GKL; eſt autem, propter parallelas KH, ad KL, ut GH ad GM; quare per 1. 6. erit rectangulum GKH ad ipſum GKL, ut quadratum ex GH ad rectangulum HGM; et eſt GKH aequale quadrato ex GK, hoc eſt quartae parti quadrati ex GH; ergo rectangulum GKL quarta pars eſt ipſius HGM. Spatium vero hoc GKL maximum eſſe eorum quae contineri poſſunt rectis a quovis puncto A inter parallelas, ad ipſas, in datis angulis ductis, manifeſtum eſt; nam quoniam eſt KH ad KL, ut AH ad AF, erit rectangulum GKH ad ipſum GKL, ut GAH ad GAF; majus autem eſt GKH ipſo GAH [5. 2.] quare majus eſt GKL ipſo GAF; ideoque eſt GKL maximum.

Componetur vero Locus propoſitus ita,

Ducantur ad BC, a quovis in ipſa DE puncto, rectae GH, GM in datis angulis, ſitque ſpatium datum aequale ipſi N; ſi igitur ſpatium N majus fuerit quarta parte rectanguli HGM, non poterit conſtrui Locus; quoniam ſpatium datum majus eſt maximo. Sit igitur N non majus quarta parte ipſius HGM; et ut GM ad GH, ita fiat N ad aliud ſpatium O; et per 1. 6. erit rectangulum HGM ad quadratum ex GH, ut ſpatium N ad ipſum O; eſt autem N non majus ipſius HGM quarta parte; quare O non majus erit quarta parte quadrati ex GH, hoc eſt non majus erit quadrato ex GK dimidio ipſius GH, ergo ad HG applicari poteſt rectangulum aequale ipſi O, deficiens quadrato [28.6.]. applicetur; ſintque A, α applicationum puncta, erit utraque recta AP, απ, quae per ipſa ducuntur parallelae ipſi BC, Locus quaeſitus; hoc eſt ſi a quovis in utravis ipſarum puncto A, ducantur ad BC, DE, rectae AF, AG ipſis GM, GH parallelae, erit rectangulum GAF aequale ſpatio N. nam quoniam rectangulum GAF, eſt ad rectangulum GAH ut (AF ad AH, hoc eſt ut GM ad GH, hoc eſt ex conſtructione, ut) ſpatium N ad ſpatium O; et rectangulum GAH aequale eſt, ex conſtructione, ſpatio O, erit rectangulum GAF aequale ipſi N, hoc eſt ſpatio dato.

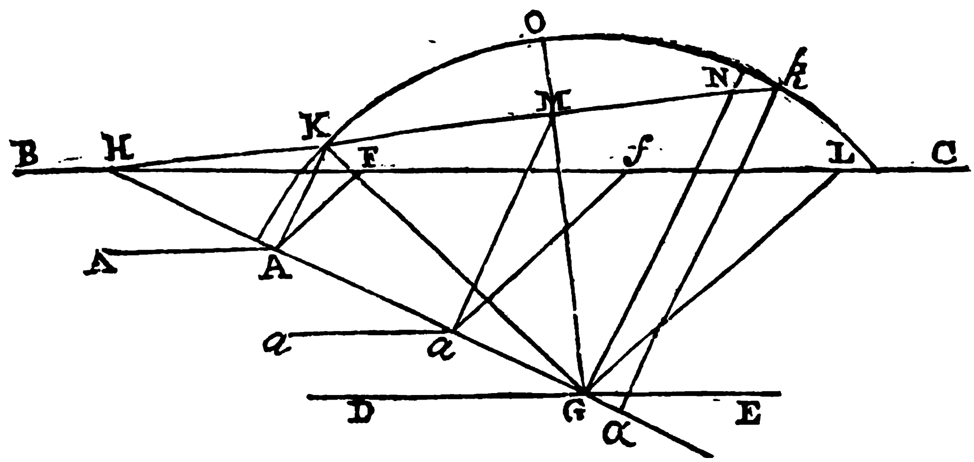
Digitized by Google



Cas. 2. Quando punctum A eſt extra parallelas eandem prorſus habet analyſin, et compoſitionem ope 84. dat. unde nullam habet determinationem.

Prop. XXXIII.

Si a puncto A ducantur ad duas poſitione datas parallelas BC, DE, rectae AF, AG, in datis angulis AFB, AGD, fueritque ſumma ſpecierum ex ductis (hoc eſt figurarum quae ſpecie data ſunt) aequalis ſpatio dato: tanget punctam A rectam poſitione datam.



Cas. 1. Quando figurae ſpecie datae ſunt quadrata.

Occurrat AG rectae BC in H; et ducatur AK ad rectos angulos ipſi AH, aequalis autem ipſi AF; junganturque HK, GK. Quoniam igitur ſpecie datum eſt triangulum AFH, dabitur ratio HA ad AF, ſeu AK, et datus eſt angulus HAK, quare [41. dat.] ſpecie datum eſt triangulum AHK

AHK, datuſque propterea erit angulus AHK, dataque erit ratio KH ad HA. Ex hypotheſi autem data eſt ſumma quadratorum, ex GA, AF, ſeu ex GA, AK; quare datum eſt quadratum ex GK, et ipſa GK magnitudine; ſed et GH magnitudine data eſt [32. dat.], quare data eſt ratio GH ad GK, et datus oſtenſus eſt angulus GHK; ideoque data eſt ratio GH ad HK [44. dat.]; et data eſt GH, quare et HK. et data oſtenſa fuit ratio KH ad HA, quare HA magnitudine data eſt [2. dat.], et datus eſt angulus AHC et recta BC poſitione, quare tangit punctum A rectam poſitione datam per Prop. 20. hujus.

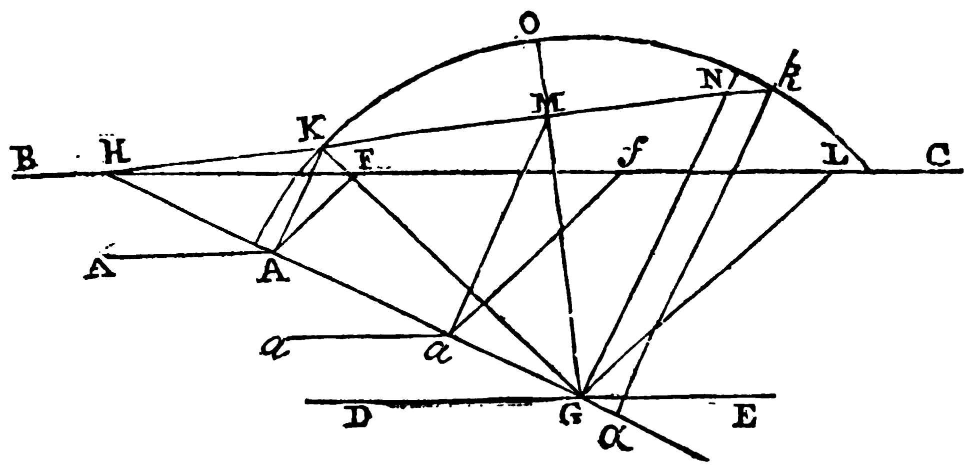
Quoniam vero ad compoſitionem requiritur ut, a dato quovis puncto G in recta DE ductâ GH faciente angulum HGD aequalem dato angulo, ponatur GK magnitudinis datae inter datum punctum G et rectam poſitione datam HK; quod non ſemper fieri poteſt; igitur Locus non ſemper poterit conſtrui, quoties ſc. recta GK quae poteſt ſpatium datum, minor fuerit perpendiculari ducta a puncto G ad ipſam HK. Unica vero ſolutio habebitur, ſi recta GK perpendiculari illo aequalis fuerit. Spatium autem quod hoc efficiet, et Locus in eo caſu ita invenientur. puta factum ſc. ſit *a* punctum in Loco quaeſito, ductiſque *a f*, *a* G ad ipſas BC, DE in angulis datis, ipſi *a* H ad rectos angulos ducatur *a* M aequalis ipſi *a f*; et ductâ HM, requiritur ut juncta GM ad ipſam ſit perpendicularis. dabitur igitur angulus rectus GMH, angulus vero GHM datus oſtendetur ut in praemiſſis; quare ſpecie dabitur triangulum GHM, et data eſt GH, quare et GM quae ſc. poteſt quadrata ex G*a*, *a* M. recta autem H*a* eodem modo quo HA, in praemiſſis, data oſtendetur.

Componetur hoc ita.

Ducantur a quovis puncto G in una parallelarum rectae GH, GL in angulis datis, et GN ad rectos angulos ipſi GH, aequalis autem rectae GL; et ad junctam HN perpendicularis ducatur GM; erit quadratum ex GM ſpatium quaeſitum. ad GH vero ducatur perpendicularis M*a*; erit

erit recta *a a* quae per *a* parallela eſt ipſi BC Locus quaeſitus. ducatur enim ad BC recta *af* parallela ipſi GL. Et quoniam eſt GL ad *af*, ut (GH ad *a* H, hoc eſt ut) GN ad *a* M, et aequales ſunt GL, GN; erunt *af*, *a*M aequales. ergo quadrata ex G*a*, *af* aequalia ſunt (quadratis ex G*a*, *a*M, hoc eſt) quadrato ex GM.

Manifeſtum autem eſt quadratum ex GM minus eſſe ſpatio cui aequalis eſt ſumma quadratorum ex rectis AF, AG quae in datis angulis ad poſitione datas BC, DE ducuntur a quovis puncto quod non ſit in recta *a a*. ſi enim ad HM ducatur AK parallela ipſi GN, erit, (ut oſtenſum fuit de rectis *af*, *a*M,) AK aequalis AF, et ſumma quadratorum ex AG, AF erit propterea aequalis quadrato ex GK. Minor autem eſt GM ipſa GK, quare quadratum ex GM eſt ſpatium minimum. Conſtat praeterea ſummam quadratorum ex rectis quae ducuntur a puncto A propiore ipſi *a*, minorem eſſe ſummâ eorum quae fiunt ex rectis quae ducuntur a puncto quovis remotiore a puncto *a*; quoniam ſc. recta GK minor eſt quavis recta quae a puncto G ad rectam HN ducta eſt remotius a perpendiculari GM quam eſt GK. his praemiſſis.

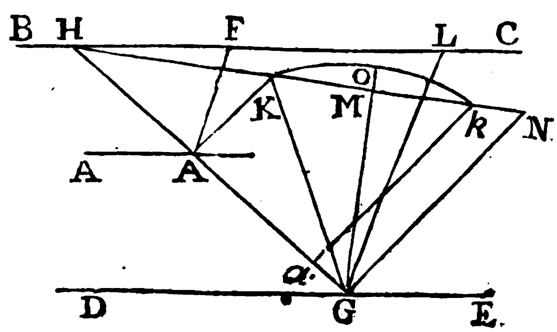


Componetur

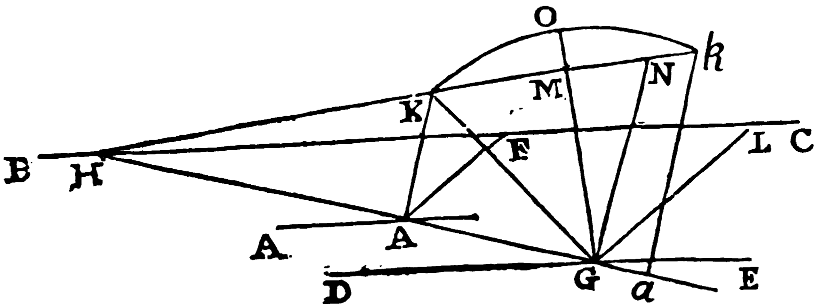
Componetur Locus ita.

A quovis punčto G in una parallelarum DE ducantur ad reliquam BC rečtae GH, GL in datis angulis. et a punčto G ponatur GN ad rectos angulos ipſi GH, aequalis autem rečtae GL; ad junčtam vero HN ducatur perpendicularis GM. Si igitur ſpatium datum aequale fuerit quadrato ex GM, Locus invenietur ut prius oſtenſum. Si vero ſpatium datum non aequale fuerit quadrato ex GM, erit ſpatium illud quadrato hoc neceſſario majus, quoniam ſc. quadratum ex GM oſtenſum eſt ſpatium minimum. Sit igitur ſpatium datum aequale quadrato ex rečtâ GO quae ſc. major eſt ipsâ GM; et centro G intervallo GO deſcribatur circulus qui rečtam HN neceſſario ſecabit in duobus punčtis K, *k*. a quovis eorum K ducatur ad GH perpendicularis KA, et per A ducatur AA ipſi BC parallela. Erit haec Locus quaeſitus. Ducatur enim AF parallela rečtae GL; et quoniam propter parallelas, eſt GL ad AF, ut (GH ad AH, hoc eſt ut) GN ad AK; et ex conſtručtione aequales ſunt GL, GN; erit AF ipſi AK aequalis. quadrata igitur ex GA, AF aequalia ſunt (quadratis ex GA, AK hoc eſt quadrato ex junčtâ GK hoc eſt) quadrato ex GO, hoc eſt ſpatio dato. Similiter alius Locus invenietur ope punčti *k*, ducendo ſc. *k*α perpendicularem ad GH et αα parallelam ipſi BC.

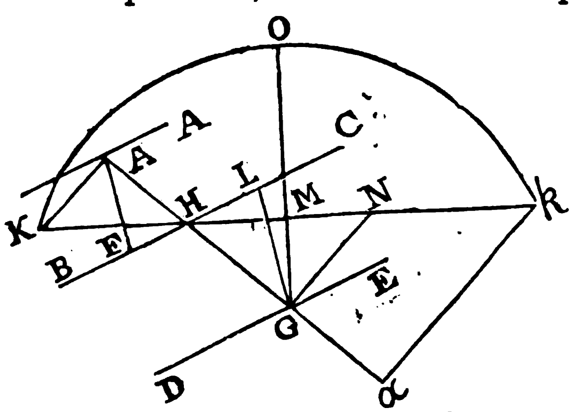
In quibus autem caſibus cadit unus vel uterque Locus inter parallelas vel extra eaſdem ita facile dignoſcetur. Sit GH ea rečtarum GH, GL quae non minor eſt reliqua. Et ſi ſpatium datum minus ſit quadrato ex GL, hoc eſt ſi rečta GO minor ſit ipſa GL, manifeſtum eſt punčta K,*k* cadere inter punčta H,N. Sunt enim H,N extra circulum, quoniam GO minor eſt GL, hoc eſt ipsâ



GN; punčtum autem M quod cadit inter H, N quia rečtus eſt angulus



gulus HGN, eſt intra circulum; quare K, *k* cadunt inter puncta H, N. igitur in hoc caſu puncta A, *a* cadunt inter G,H puncta, hoc eſt uterque Locus cadit inter parallelas. Si vero GO major fuerit ipſa GN ſeu GL, minor autem quam GH, cadet punctum K, ut antea, inter puncta H, N; punctum vero *k* cadet in HN producta, eſt enim N intra circulum. quare in hoc caſu cadet A inter G, H puncta, *α* vero in HG producta ad partes G. At ſi GO major fuerit ipſa GH, et propterea major quam GL ſeu GN cadet punctum K in HN producta ad partes H; *k* vero in eadem ad partes N producta. quare A



erit in GH ad partes H, *α* vero in GH ad partes G producta, ideoque uterque Locus cadit extra parallelas.

Denique ſi GO aequalis fuerit ipſi GL ſeu GN, circulus tranſibit per punctum N quod propterea idem erit cum puncto *k*; et quoniam NG perpendicularis eſt ad GH, erit ipſa DGE unus ex locis, alter vero cadet inter parallelas.

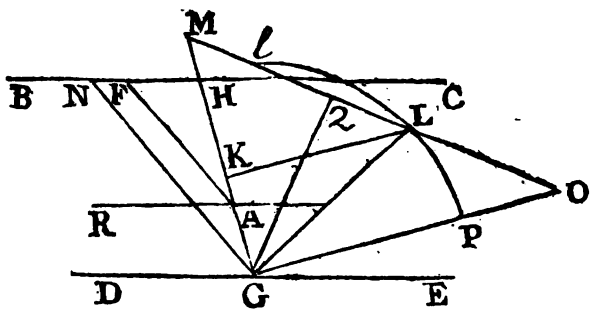
Spatium autem minimum, quadratum ſc. ex GM ita determinatur. Propter triangula rectangula HGN, HGM, erit [8. 6.] HN ad NG, ut GH ad GM. et quadrata ex ipſis proportionalia ſunt [22. 6.], hoc eſt quadratum ex GM quarta proportionalis eſt ſummae quadratorum ex GH, GL, quadrato ex GL, et quadrato ex GH.

Cas.

Digitized by Google

Cas. 2. Quando figurae ſpecie datae non ſunt quadrata.

A puncto A ductae ſint AF, AG ad parallelas BC, DE, poſitione datas in datis angulis, et ab ipſis AF, AG deſcriptae ſint figurae ſpecie datae, dataque ſit ipſarum ſumma; tanget punctum A rectam poſitione datam.

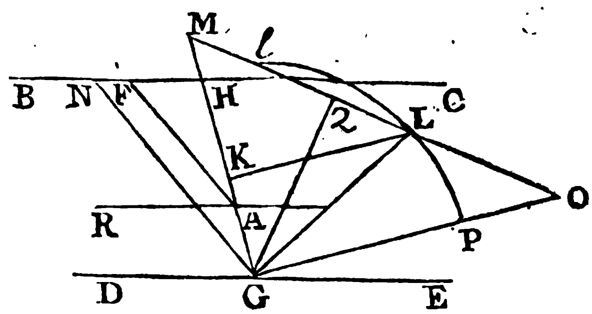


Occurrat AG rectae BC in H, ſitque quadratum ex GK aequale figurae ſpecie datae ſuper GA deſcriptae, quodque propterea [49. dat.] datam habebit rationem ad quadratum ex GA; quare et ratio GK ad GA data erit [cor. 20. 6. et 24. dat., ſeu per 54. dat.]. ducatur KL ad rectos angulos ipſi GK, ſitque quadratum ex KL aequale figurae ſpecie datae ſuper AF deſcriptae, et ſimiliter ratio KL ad AF data oſtendetur. fiat autem GM ad GH, ut GK ad GA, et ita erit [19. 5.] reliqua KM ad reliquam AH; ergo datae ſunt rationes KM ad AH, et GM ad GH. et data eſt GH magnitudine [32. dat.], quare et GM. Jungantur GL, LM, et quoniam data eſt ratio KM ad AH, et ratio AH ad AF, ut et ratio AF ad KL; dabitur [8. dat.] ratio KM ad KL; datuſque eſt angulus MKL, quare [41. dat.] datus eſt angulus KML, et ratio ML ad MK. data autem ex hypotheſi eſt ſumma ſpecierum ſuper AG, AF, hoc eſt ſumma quadratorum ex GK, KL, ergo datum eſt quadratum ex GL, et ipſa GL magnitudine dabitur, quare ad datam GM datam habebit rationem. et datus eſt angulus GML, ſpecie igitur [44. dat.] datum eſt GML triangulum, quare et ratio LM ad MG data eſt, et data eſt MG, quare et LM. Et datae oſtenſae ſunt rationes LM ad MK, et MK ad AH; ergo [8. dat.] data eſt ratio LM ad AH; et data eſt LM, ergo AH magnitudine data eſt. et datus eſt angulus AHC, et recta BC poſitione. Quare tangit punctum A rectam poſitione datam per Prop. 20. huj.

Digitized by Google

Componetur vero ita.

A quovis punſto G in una parallelarum DE, ducantur ad reliquam BC, rectae GH, GN in datis angulis, et ſuper ipſas deſcribi intelligantur figurae ſimiles iis quae ſuper rectas AG, AF ad ipſas DE, BC ducendas deſcribendae ſunt.



in GH vero ſumatur GM (invenienda per 14. 2.) cujus quadratum aequale ſit figurae ſuper GH. et ductâ rectâ GO ad rectos angulos ipſi GH, in ea eodem modo ſumatur G O cujus quadratum aequale ſit figurae ſuper GN, et jungatur MO. Spatium autem datum, cui aequalis debet eſſe ſumma figurarum ſuper ipſas AG, AF, aequale ſit quadrato ex GP. Manifeſtum autem eſt, eo modo quo in praecedente caſu ſimile oſtenſum fuit, debere GP non minorem eſſe recta GQ quae perpendicularis ducitur a puncto G ad rectam MO. et centro G, intervallo GP, deſcribatur circulus, rectae MO in uno vel duobus punctis occurrens, quorum unum ſit L, a quo ad GM ducatur perpendicularis LK. Ut vero GM ad GH ita fiet GK ad GA (et ita erit KM ad AH), et per A ducatur AR parallela ipſi BC; erit AR Locus quaeſitus. ducatur enim AF parallela ipſi GN; et quoniam propter parallelas eſt GO ad GM, ut KL ad KM; ut vero GM ad GH; ita ex conſtructione eſt KM ad AH; et ut GH ad GN, ita propter parallelas eſt AH ad AF; erit ex aequo GO ad GN, ut KL ad AF; et permutando ut GO ad KL, ita GN ad AF, ergo [22. 6.] eſt quadratum ex GO ad illud ex KL, ut figura ſuper GN ad figuram ſimilem ſimiliterque deſcriptam ſuper AF. Ex conſtructione autem quadratum ex GO aequale eſt figurae ſuper GN, quare quadratum ex KL aequale eſt figurae ſuper AF. Et quoniam ex conſtructione eſt GM ad GH, ut GK ad GA, erit permutando GM ad GK, ut GH ad GA. Ergo [22. 6.] eſt quadratum ex GM ad illud

lud ex GK, ut figura ſuper GH ad figuram ſimilem ſimiliterque deſcriptam ſuper GA. Eſt autem quadratum ex GM aequale figurae ſuper GH, quare quadratum ex GK aequale eſt figurae ſuper GA deſcriptae. Ergo figurae ſuper GA, AF deſcriptae ſimul aequales ſunt quadratis ex GK, KL, hoc eſt quadrato ex GL ſeu GP, hoc eſt ſpatio dato.

Spatium autem minimum, quadratum ſc. ex GQ, eodem modo quo in praecedente caſu determinatur. eſt enim MO ad GO, ut GM ad GQ, et quadrata ex ipſis proportionalia ſunt; hoc eſt quadratum ex GQ quarta proportionalis eſt ſummae quadratorum ex GM, GO; quadrato ex GO, et quadrato ex GM; ſeu, quod idem eſt, ſummae figurarum ſuper GN, GH, figurae ſuper GN, et figurae ſuper GH.

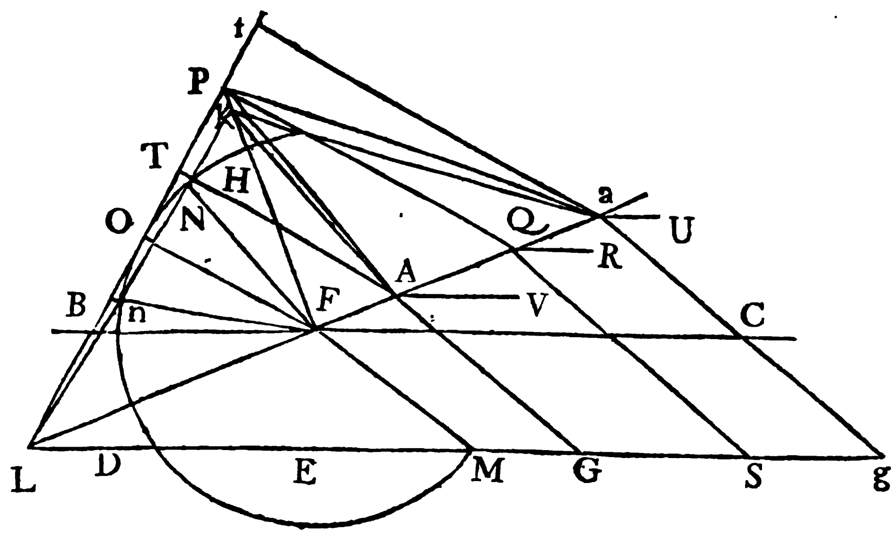
Prop. XXXIV.

SI a puncto A ducantur ad duas poſitione datas parallelas BC, DE, rectae AF, AG in datis angulis AFB, AGD; fueritque exceſſus ſpecierum (hoc eſt figurarum quae ſpecie datae ſunt) ex ductis, aequalis ſpatio dato: tanget punctum A rectam poſitione datam.

Cas. I. Quando figurae ſpecie datae ſunt quadrata.

Sit AG ea ductarum quae major eſt altera AF, et quoniam ex hypotheſi quadratum ex AG aequale eſt quadrato ex AF, una cum ſpatio dato, ſi ducatur FH ad rectos angulos ipſi AF, et in ea ſumatur FK cujus quadratum aequale ſit ſpatio dato, erit juncta AK aequalis ipſi AG [47. I.]. Occurrat AF ipſi DE in L, et magnitudine dabitur

FL [32. dat.], ſed et FK magnitudine data eſt, datuſque eſt angulus LFK; quare, junctâ LK, ſpecie et magnitudine dabitur triangulum FKL [41. dat.]. igitur datus eſt angulus ALK; et propter ſpecie da-



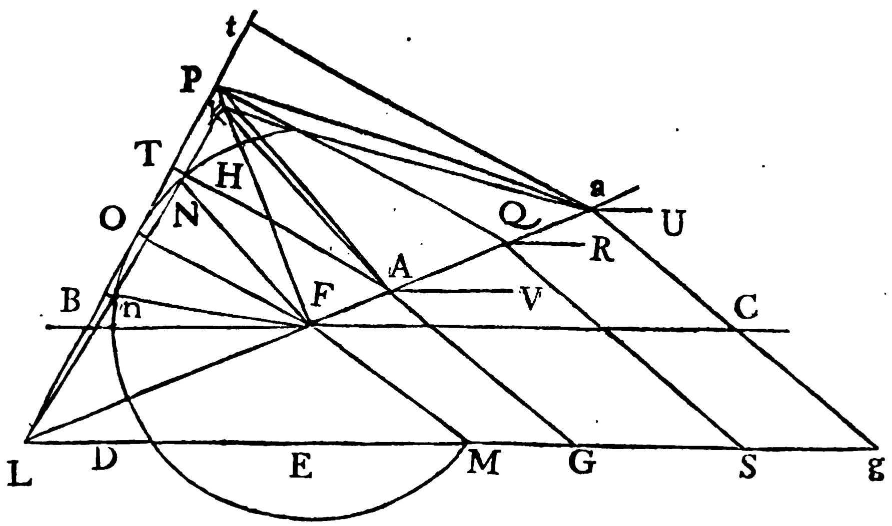
tum triangulum ALG, dabitur ratio AL ad AG, hoc eſt ratio AL ad AK. Ergo [44. dat.] triangulum ALK ſpecie datum eſt, ſed et magnitudine, propter LK magnitudine datam; ergo AL magnitudine data eſt, et datus eſt angulus ALD, et recta DL poſitione; ergo tangit punctum A rectam poſitione datam, per Prop. 20. huj.

Componetur vero ita, ope ſc. compoſitionis 44. datorum. ad DE, a puncto quovis F in recta BC, ducantur FL, FM in datis angulis, quarum FM ſit ea quae facit angulum FMD aequalem angulo, quem ducenda a puncto A, cum recta DE comprehendere debet. eſt igitur ratio FL ad FM ratio data quam in analyſi dictum fuit habere AL ad AG, ſeu AK; ſit autem quadratum ex FK aequale ſpatio dato, et ponatur FK ad rectos angulos ipſi FL; et quoniam a puncto K ad FL ita ducenda eſt KA ut ad ipſam eam habeat rationem recta AL, hoc fiet, centro F, intervallo FM, circulum deſcribendo, junctae rectae KL occurrentem in punctis N, *n*; et junctae FN vel F *n* parallelam

lelam ducendo KA vel K*a*. Quoniam vero circulus hic non ſemper occurrere poterit rectae KL, ideo neque Locus ſemper conſtrui poterit. Manifeſtum autem eſt, ſi vel punctum L vel punctum K intra circulum inveniatur, hoc eſt ſi recta FM major fuerit unâ vel utrâque ipſarum FL, FK, rectam LK neceſſario circulo, in duobus punctis, occurrere. quare in his caſibus Locus ſemper conſtrui poterit. Si vero FM minor fuerit utrâque ipſarum FL, FK, in quo caſu puncta L, K extra circulum invenientur, poterit recta LK vel circulum ſecare, vel ipſum contingere, vel extra eundem cadere. Si autem LK circulum contigerit unica erit recta propoſito ſatisfaciens. Et ſpatium cui in hoc caſu aequalis debet eſſe exceſſus quadratorum ex AG, AF, invenietur ducendo a puncto L rectam LO, quae circulum contingat in O. Occurrat enim LO ipſi FK in P; erit quadratum ex FP ſpatium quaeſitum. et ad FL ductâ PQ parallelâ junctae FO, erit recta QR, quae per Q ducta eſt ipſi BC parallela, Locus in hoc caſu quaeſitus. ductis enim, a quovis in ipſa puncto Q, rectis QS, QF ad parallelas DE, BC in datis angulis, erit exceſſus quadratorum ex ipſis, aequalis quadrato ex FP. Eſt enim, propter parallelas, QS ad FM, ſeu FO; ut (QL ad FL, hoc eſt ut) QP ad FO. aequales igitur ſunt QS, QP. quare et exceſſus quadratorum ex QS, QF aequalis eſt exceſſui quadratorum ex QP, QF, hoc eſt quadrato ex FP.

Inquirendum autem eſt an ſpatium hoc, quadratum ſc. ex FP, majus aut minus ſit ſpatio, cui aequalis eſt exceſſus quadratorum a rectis quae ipſis FL, FM parallelae ducuntur a quovis puncto extra rectam QR. Sit A iſtiuſmodi quodvis punctum, et ductis AF, AG ipſis FL, FM parallelis; ducatur ad LP recta AT ipſi QP, ſeu FO, parallela, et AP jungatur. et quoniam eſt AG ad FM, ſeu FO, ut (AL ad FL, hoc eſt) ut AT ad FO, aequales erunt AG, AT. Eſt autem, propter angulum ATP rectum, AP major AT; quare exceſſus quadratorum ex AP, AF, hoc eſt exceſſus eorum quae fiunt ex QP, QF, (quadratum ſc. ex FP) major eſt exceſſu eorum quae fiunt ex AG, AF

AF. Spatium igitur, cui aequalis eſt exceſſus quadratorum ex QS, QF quae a puncto in Loco QR ducuntur, maximum eſt.



Praeterea exceſſus quadratorum, quae fiunt ex rectis, quae a punctis ipſi Q propioribus ducuntur, major erit exceſſu eorum quae fiunt a rectis quae a punctis remotioribus ducuntur. Sit *a* punctum in FQ propius ipſi Q quam eſt punctum A, et ducantur AG, *ag* parallelae ipſi FM; et AT, *at* parallelae ipſi PQ. aequales igitur, ut oſtenſum fuit, ſunt AG, AT, ut et *ag*, *at*; junctiſque AP, *a*P, comparandus eſt exceſſus quadratorum ex AG, AF, hoc eſt, ex AT, AF cum exceſſu eorum quae fiunt ex *ag*, *a*F hoc eſt ex *at*, *a*F. propter rectangula vero triangula AFP, ATP ſuper baſim communem AP, exceſſus quadratorum ex AT, AF, aequalis eſt exceſſui eorum quae fiunt ex PF, PT. et ſimiliter, in triangulis rectangulis *a*FP, *at*P ſuper baſim *a*P, exceſſus quadratorum ex *at*, *a*F aequalis eſt exceſſui eorum quae fiunt ex PF, P*t*. comparandus igitur eſt exceſſus quadratorum ex PF, PT cum exceſſu eorum quae fiunt PF, P*t*. quare comparanda eſt recta PT cum ipſa P*t*. major autem eſt PT ipsâ P*t*, quia, ex hypotheſi, major eſt AQ, ipsâ Q*a*. Ergo exceſſus quadratorum ex PF, P*t*,

Digitized by Google

P *t*, major eſt exceſſu eorum qui fiunt ex PF, PT, et retrogradiendo oſtendetur exceſſus quadratorum ex *ag*, *a* F, major exceſſu eorum quae fiunt ex AG, AF. hiſce praemiſſis reliqua compoſitio ita fiet.

Ductis, ut prius dictum, FL, FM, FK, LK, quarum FK poteſt ſpatium datum, et deſcripto circulo, centro F, intervallo FM, ductâque ipſum contingente LO; ſi recta LK circulo non occurrat, Locus non poterit conſtrui; ſi vero ipſum contingat, conſtruetur Locus ut in praemiſſis oſtenſum fuit. Si vero circulo occurrat LK in duobus punctis N, *n*, a quovis eorum N ducatur recta ad punctum F, et ipſi NF parallela ducatur KA, rectae LF occurrens in A, et per A ducatur AV parallela ipſi BC; erit haec Locus quaeſitus. a quovis enim in ipſa puncto A, ducantur AG, AF parallelae ipſis FM, FL; et quoniam eſt AG ad FM, ſeu FN, ut (AL ad FL, hoc eſt) ut AK ad FN, erunt inter ſe aequales AG, AK. quare exceſſus quadratorum ex AG, AF aequalis erit exceſſui eorum quae fiunt ex AK, AF, hoc eſt quadrato ex FK, ſeu ſpatio dato.

Spatium autem maximum, quadratum ſc. ex FP, ita determinatur. Jungatur FO, et propter aequiangula triangula OLF, OFP, erit [8. 6.] OL ad LF, ut OF ad FP. et quadrata ex ipſis proportionalia erunt; hoc eſt ſpatium maximum, quadratum ſc. ex FP, quartum eſt proportionale quadrato ex OL, hoc eſt exceſſui quadrati ex FL ſupra quadratum ex OF, ſeu FM, et quadratis ex ipſis LF, FM.

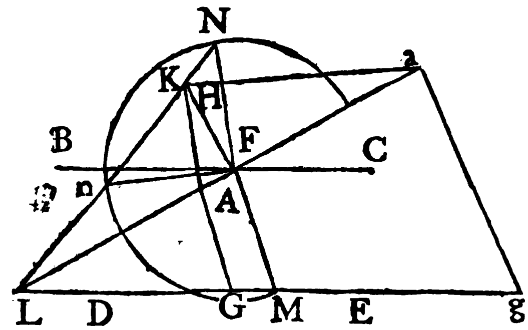
Caſus vero in quibus Locus AV cadit vel inter parallelas BC, DE vel extra ipſas, ſeu ad partes rectae BC, ſeu ad partes ipſius DE, ita diſtingui poſſunt.

1. Sit FM minor utrâque ipſarum FL, F K. ductâ autem LO quae contingat circulum in O, occurrat eadem ipſi FK in P; eſt igitur FK non major quam FP ut in determinatione oſtenſum fuit. quare juncta LK vel coincidet cum LP, vel circulum in duobus punctis N, *n* ſecabit, in utroque autem caſu patet rectam PQ quae in primo caſu, ipſi OF parallela eſt, vel rectas KA, K *a* quae, in altero caſu, ipſis NF, *n* F parallelae ſunt, occurrere rectae LF productae verſus partes F. Quare in hoc caſu Locus QR, vel AV, *av*, ſemper extra parallelas invenietur.

Digitized by Google

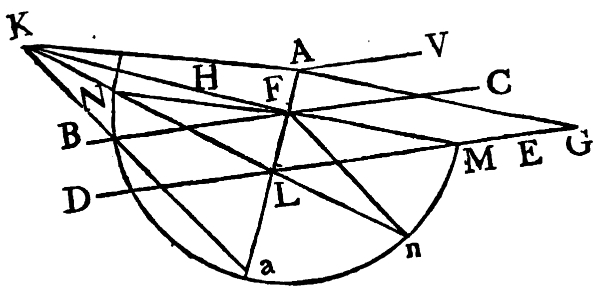
Si vero FM aequalis fuerit ipſi FL, minor autem quam FK, coincidet L puncto *n*, quare recta, quae per K ducta eſt parallela ipſi *n* F, ſeu LF nunquam eidem occurret, et unica recta AV erit Locus. At ſi FM aequalis fuerit ipſi FK, minor autem quam FL, coincidet K puncto N, quare cadet A in F, et ipſa BC erit alter ex Locis.

2. Sit FM minor FL major autem FK. Erit igitur punctum L extra, et punctum K intra circulum. et quoniam punctum K eſt in latere LN



trianguli FLN erit punctum A in latere LF. quare Locus cadit inter parallelas. et quoniam idem punctum K eſt in latere L *n* trianguli FL *n* ultra baſim *n* F producto, erit punctum *a* in latere LF ultra F producto, et Locus erit extra parallelas ad partes ipſius BC. Si autem aequalis fuerit FM ipſi FK, coincidet K puncto N, quare cadet punctum A in F, et ipſa BC erit alter ex Locis.

3. Sit FM major FL, minor autem FK. punctum igitur L eſt intra circulum, et punctum K extra. et quoniam punctum K eſt ultra baſim FN trianguli FLN, erit A ultra eandem, quare Locus erit extra parallelas ad partes ipſius BC, quoniam vero idem K

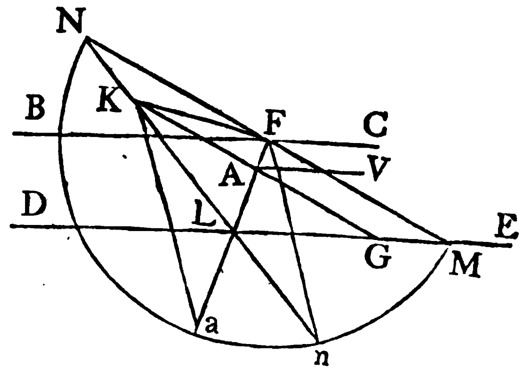


eſt in latere *n* L trianguli FL *n* ultra verticem L producto, erit punctum *a* in latere FL ultra eundem verticem producto, et locus erit extra parallelas ad partes ipſius DE. Si autem FM aequalis fuerit ipſi FL coincidet L puncto *n*, quare recta quae per K ducta eſt parallela ipſi *n* F, ſeu LF nunquam eidem occurret, et unica recta AV erit Locus.

4. Quando

Digitized by Google

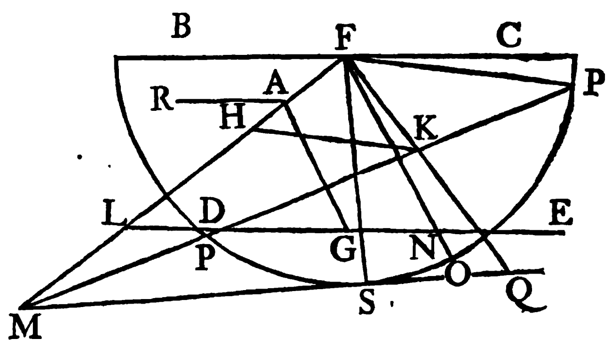
4. Quando FM major eſt utraque ipſarum FL, FK; puncta igitur L, K ſunt intra circulum. et quoniam punctum K eſt in latere LN trianguli FLN, erit punctum A in latere FL, quare Locus eſt inter parallelas. quoniam vero idem K eſt in latere *n*L trianguli FL*n* ultra verticem L producto, erit *a* in latere FL ultra eundem verticem producto. quare Locus erit extra parallelas ad partes ipſius DE.



Si autem FM aequalis fuerit ipſi FL, coincidet L puncto *n*, quare recta quae per K ducta eſt ipſi *n*F, ſeu LF parallela, nunquam eidem occurret, et unica recta AV erit Locus.

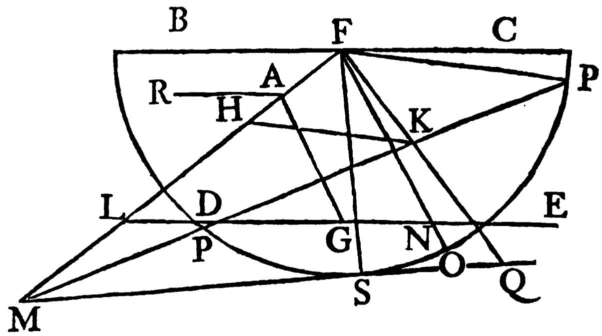
Cas. 2. Quando figurae ſpecie datae non ſunt quadrata.

A puncto A ductae ſint ad parallelas poſitione datas BC, DE, rectae AF, AG in datis angulis; et ab ipſis deſcriptae ſint figurae ſpecie datae, quarum exceſſus aequalis ſit ſpatio dato. tanget punctum A rectam poſitione datam.



Sit AG ea ductarum ſuper quam figura deſcripta major eſt figurâ ſuper alteram, ſitque quadratum ex FH aequale figurae ſuper AF. a puncto vero F, ducatur recta ipſi AF ad rectos angulos, et in ea ſumatur FK cujus quadratum aequale ſit dato ſpatio, et jungatur HK. Quoniam igitur, ex hypotheſi, figura ſuper AG, aequalis eſt figurae ſuper AF, una cum quadrato ex FK, hoc eſt quadratis ex HF, FK, hoc eſt quadrato ex HK; figura ſuper AG aequalis erit quadrato ex HK. quare,

per 49. dat. ut in caſ. 2. praecedentis oſtenſum, dabitur ratio AG ad HK, ut et ratio AF ad HF. Occurrat FA ipſi DE in L, fiatque FM ad FL, ut FH ad FA; quare ita erit HM ad AL, et dabuntur rationes HM ad AL, et FM ad FL. et data eſt FL magnitudine [32. dat.], quare et FM. quoniam vero data eſt ratio HM ad AL, et ratio AL ad AG, ut et ratio AG ad HK; dabitur ratio HM ad HK [8. dat.]. et quoniam magnitudine dantur MF, FK, datuſque eſt angulus MFK, ſpecie et magnitudine [41. dat.] datum eſt triangulum MFK; igitur datus eſt angulus HMK, et data oſtenſa eſt ratio HM ad HK, ergo ſpecie datum eſt triangulum MHK [44. dat.], quare data eſt ratio MK ad MH, et data oſtenſa eſt ratio MH ad AL, data eſt igitur [8. dat.] ratio MK ad AL. et data eſt MK magnitudine, quare et AL; datuſque eſt angulus ALE, et recta DE poſitione; ergo tangit punctum A rectam poſitione datam per Prop. 20. hujus.



Componetur vero ita.

A quovis puncto F, in una parallelarum BC, ducantur ad reliquam DE, rectae FL, FN in datis angulis, et ſuper ipſas deſcribi intelligantur figurae ſimiles iis quae, ſuper rectas AF, AG ad parallelas DE, BC ducendas, deſcribendae ſunt. In FL vero ſumatur FM, cujus quadratum aequale ſit figurae ſuper FL; et in FN ſumatur FO cujus quadratum aequale ſit figurae ſuper FN. et ducatur ad rectos angulos ipſi FL recta FK cujus quadratum aequale ſit ſpatio dato, cui exceſſus figurarum ſuper AG, AF debet eſſe aequalis, et MK jungatur. Centro vero F, intervallo FO, deſcribatur circulus qui MK occurrat (debet enim FK non major eſſe FQ intercepta inter F et rectam MQ, quae circulum contingit) in uno vel duobus punctis, quorum unum ſit P, et junctae PF paral-

parallela ducatur KH, occurrens FL in H. Ut vero FM ad FL ita fiat HF ad FA (et ita erit HM ad AL), et per A ducatur AR parallela ipſi BC; erit AR Locus quaeſitus. ducatur enim AG parallela ipſi FN; et quoniam eſt FP ad FM, ut HK ad HM; ut vero FM ad FL, ita eſt HM ad AL; et ut FL ad FN, ita eſt AL ad AG; erit ex aequo FP ad FN, ut HK ad AG, et permutando eſt FP ſeu FO ad HK, ut FN ad AG. Ergo [22. 6.] eſt quadratum ex FO ad illud ex HK, ut figura ſuper FN ad figuram ſimilem ſimiliterque deſcriptam ſuper AG. ex conſtructione autem quadratum ex FO aequale eſt figurae ſuper FN, quare quadratum ex HK aequale eſt figurae ſuper AG. Et quoniam, ex conſtructione, eſt FM ad FL, ut FH ad FA; erit permutando FM ad FH, ut FL ad FA. et per 22. 6. ut quadratum ex FM ad quadratum ex FH, ita figura ſuper FL ad figuram ſuper FA ſimilem ſimiliterque deſcriptam. eſt autem ex conſtructione, quadratum ex FM aequale figurae ſuper FL, quare quadratum ex FH aequale eſt figurae ſuper AF. Ergo exceſſus figurae ſuper AG ſupra figuram ſuper AF, aequalis eſt exceſſui quadrati ex HK ſuper quadratum ex FH, hoc eſt quadrato ex FK, hoc eſt ſpatio dato.

Spatium autem maximum, quadratum ſc. ex FQ, determinatur eodem modo ut in praecedente caſu. contingat enim MQ circulum in S, et jungatur FS, et, per 8. et 22. 6. erit quadratum ex SM ad quadratum ex MF, ut quadratum ex SF ad illud ex FQ. hoc eſt ſpatium maximum quadratum ex FQ, quartum eſt proportionale exceſſui quadrati ex MF ſupra illud ex FS ſeu FO, et quadratis ex MF, FO. ſeu quod idem eſt exceſſui figurae ſuper FL ſupra eum ſuper FN, et ipſis figuris ſuper FL, FN.

Schootenius caſus ſecundos, duarum ultimo praecedentium propoſitionum, nullatenus oſtendit; putat vero eos ſolutos iri ope 77. datorum, in qua re omnino deceptus eſt, figurae enim ſpecie datae de quibus in iſtis caſibus agitur, datam inter ſe rationem minime habere ſupponuntur.

Digitized by Google

APOLLONII PERGAEI

LOCORUM PLANORUM

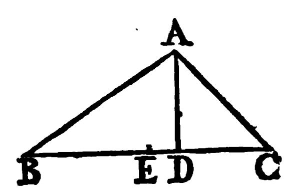
LIBER SECUNDUS.

LEMMA I.

Lemma hoc eſt Prop. cxx. lib. ſeptimi Pappi Alexandrini, quodque ibi dicitur Lemma in Locum ſecundum.

SIT triangulum ABC, et perpendicularis AD; dico exceſſum quadratorum ex BA, AC, quadratorum ex BD, DC exceſſui aequalem eſſe. Quod ſi BC biſariam ſecetur in puncto E, erit quadratorum ex BA, AC exceſſus id quod bis BC et ED continetur.

Quo enim quadratum ex AB excedit quadratum ex AC, eodem [47. 1.] quadrata ex AD, DB excedunt quadrata ex AD, DC; et dempto communi quadrato ex AD, quo reliquum quadratum ex BD excedit quadratum ex DC, eodem et quadratum ex AB excedet quadratum ex AC; quod erat primum. Et quoniam BE aequalis eſt EC, erit BD aequalis utriſque CE, ED; quadratum autem ex CE, ED tanquam una linea, excedit [per 8. 2.] quadratum ex DC, rectangulo CED quater, hoc eſt rectangulo quod bis BC, ED continetur;



tur; exceſſus igitur quadratorum ex BD, DC, ſeu exceſſus quadrato- ex AB, AC, eſt id quod bis BC, DE continetur. quod erat alterum.

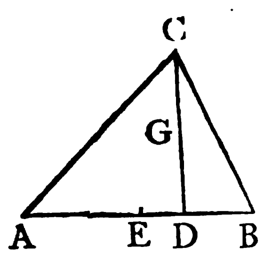
PROP. I.

Propoſitiones ſeptem priores hujus libri ſecundi ſequuntur eodem ordine quo ſunt apud Pappum enarratae.

SI a duobus punctis datis inflectantur duae rectae lineae, ſintque quadrata quae ab ipſis fiunt, dato ſpatio differentia: tanget punctum [occurſus ſc.] rectam poſitione datam.

Sint A, B, puncta data, et ab ipſis inflectantur rectae AC, BC; ſitque exceſſus quadrati ex AC ſupra quadratum ex BC, aequalis ſpatio dato: tanget punctum C rectam poſitione datam.

Jungatur enim AB, ad quam ductâ perpendiculari CD, bifariamque ſectâ AB in E; erit, per Lemma praecedens, exceſſus quadratorum ex AC, CB, aequalis rectangulo quod bis AB, ED continetur; datus autem, ex hypotheſi, eſt exceſſus quadratorum ex AC, CB; quare datum eſt rectangulum contentum bis AB, ED; ideoque dabitur ipſum rectangulum AB, ED; et data eſt AB poſitione et magnitudine; quare ED magnitudine data eſt; et datum eſt punctum E, ideoque et punctum D [27. dat.]; datuſque eſt angulus rectus ADC, et recta AD poſitione; ergo [29. dat.] DC poſitione data; tangit propterea punctum C rectam poſitione datam.

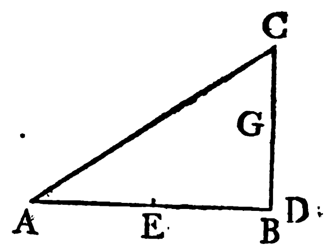


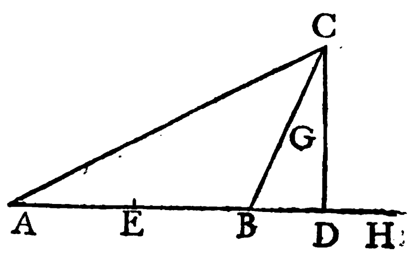
Componetur vero ita.

Sit datus exceſſus quadratorum aequalis ſpatio F, ſitque punctum A illud a quo major inflexarum ducenda eſt; bifariamque ſectâ AB in

in E, ponatur a puncto E, verſus partes puncti B, recta ED, quae faciat rectangulum contentum ipsâ ED, et rectâ AB bis, aequale ſpatio F; et ducatur DG ad rectos angulos ipſi AD: erit DG Locus quaeſitus; hoc eſt, ſi ad quodvis in ipsâ punctum C inflectantur AC, BC; erit exceſſus quadratorum ex ipſis aequalis ſpatio dato F. Eſt enim exceſſus quadratorum ex AC, CB [per Lemma] aequalis rectangulo contento bis AB, ED, hoc eſt, ex conſtructione, ſpatio dato F.

Si ſpatium datum F minus fuerit quadrato ex AB, hoc eſt quadrato ex ejus dimidio EB quater ſumpto; erit rectangulum BED quater, minus quadrato ex EB quater; quare ED recta minor erit ipsâ EB, et cadet punctum D inter E et B; ſi autem ſpatium F aequale ſit quadrato ex AB, cadet punctum D in ipſum B; et ſi majus fuerit ſpatium F quadrato ex AB, cadet D in EB producta, ut patet.





Schootenii conſtructio quae fit faciendo rectangulum BAH aequale ſpatio dato, et bifariam ſecando HB in D, eadem reipſa eſt cum praecedente; nam quoniam AH dupla eſt ipſius ED, erit rectangulum contentum ED et AB bis aequale rectangulo BAH, hoc eſt ſpatio dato.

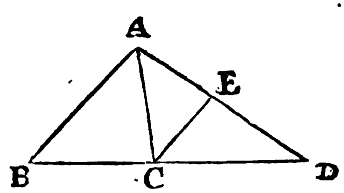
Praecedens vero ea eſt quam ex Pappi Lemmate videtur Apollonium dediſſe.

LEMMA.

Lemma II.

Eſt Prop. cxix. lib. ſeptimi Pappi Alexandrini, quae ibi dicitur Lemma in Locum primum libri ſecundi.

Sit triangulum ABC, et ducatur recta linea AD, ita ut BD ſit ad DC, ut quadratum ex BA ad quadratum ex AC; dico rectangulum BDC quadrato ex AD aequale eſſe.



Ducatur per C ipſi AB parallela CE; eſt igitur BD ad DC, ut AB ad CE, et ita quadratum ex AB ad rectangulum quod AB et CE continetur. ut autem BD ad DC, ita, ex hypotheſi, eſt quadratum ex BA ad quadratum ex AC. Ergo rectangulum contentum AB et CE, quadrato ex AC eſt aequale; eſt igitur AB ad AC, ut AC ad CE; et ſunt circa aequales angulos alternos BAC, ACE; quare aequiangula ſunt BAC, ACE triangula, et angulus CAD aequalis angulo B; unde et triangula ABD, CAD aequiangula ſunt; et propterea ut BD ad DA, ita DA ad DC; ideoque rectangulum BDC, quadrato ex AD aequale erit.

Prop. II.

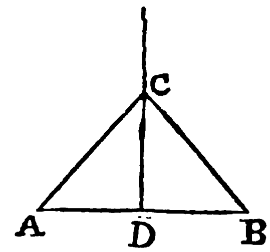
Si a duobus punctis datis inflectantur duae rectae lineae, datam habentes rationem; tanget punctum [occurſus ſc.] rectam lineam vel circumferentiam poſitione datam.

Cas. I. Quando ratio data, eſt ratio aequalis ad aequale.

Sint

Sint A, B puncta data, et inflectantur AC, BC inter ſe aequales: tanget punctum C rectam poſitione datam.

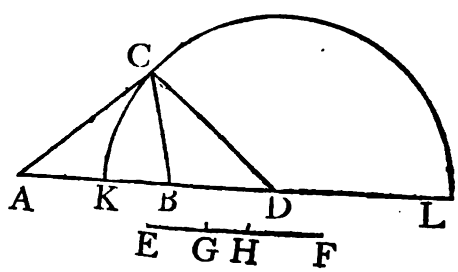
Ducatur enim ad junctam AB perpendicularis CD; quoniam igitur aequales ſunt AC, CB, erit AD aequalis ipſi DB [26. 1.]; et data eſt AB poſitione et magnitudine, quare datum punctum D; et datus eſt angulus ADC; poſitione igitur data eſt DC, [29. dat.]: et propterea tangit C rectam poſitione datam.



Compoſitio patet; biſariam enim ſectâ AB in D, et ductâ DC ipſi AD ad rectos angulos, manifeſtum eſt rectas AC, BC a punctis A, B ad quodcunque punctum in DC inflexas, inter ſe aequales eſſe.

Cas. 2. Quando ratio data non eſt aequalis ad aequale.

Sint A, B puncta data, et inflectantur inaequales AC, BC, datam habentes rationem: tanget punctum C circumferentiam poſitione datam.



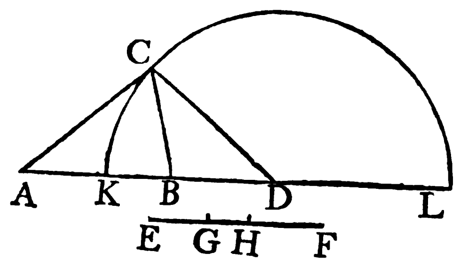
Quoniam enim data eſt ratio AC ad CB, dabitur [50. dat.] ratio quadrati ex AC ad quadratum ex CB; producatur AB ad D, ut in hac ratione ſit AD ad DB; et propter AB poſitione et magnitudine datam, et datam rationem AD ad DB, dabitur punctum D, et ipſae AD, DB, quare rectangulum ADB datum eſt; huic vero, per Lemma 2, aequale eſt quadratum ex juncta DC, quod propterea datum erit; ipſaque DC magnitudine dabitur; et datum oſtenſum eſt punctum D; ergo tangit punctum C circumferentiam poſitione datam, per Prop. 1. Lib. 1. huj.

Componetur vero ita.

Sit ratio data eadem rationi EF ad FG, et ipſis EF, FG tertia proportionalis inveniatur FH, et in AB producta ſumatur punctum D,

Digitized by Google

quod faciat AD ad DB, ut EF ad FH, dein inter AD, DB inveniatur media proportionalis DK; centroque D, intervallo DK, deſcribatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaeſitus; hoc eſt, ſi a datis punctis A, B, inflectantur ad quodvis in circumferentia punctum rectae AC, BC; erit AC ad BC, in data ratione, quam habet EF ad FG. Jungatur enim DC; et quoniam proportionales ſunt, AD, DK, DB, erit quadratum ex AD [cor. 20. 6.] ad quadratum ex DK, ut (AD ad DB, hoc eſt ut EF ad FH, hoc eſt ut) quadratum ex EF ad quadratum ex EG [cor. 20. 6.]. Quare [22. 6.] eſt AD ad DK, ut EF ad FG. Quoniam vero eſt AD ad DK ſeu DC, ut DC ad DB, erunt ADC, DCB triangula aequiangula; ergo eſt AC ad BC, ut (AD ad DC, ſeu DK, hoc eſt ut) EF ad FG.



De punctis vero K, L, in quibus circumferentia rectae AB occurrit, idem demonſtrabitur ut ſequitur: Quoniam eſt AD ad DK, ſeu DL, ut DK ad DB; erit reliqua AK ad reliquam KB, ut AD ad DK, hoc eſt, ut EF ad FG: ſimiliter, erit [12. 5.] AL ad LB, ut AD ad DK, ſeu ut EF ad FG. unde patet, ſi fiat tum AK ad KB, tum AL ad LB in ratione data, quam ſc. habet EF ad FG, fore KL diametrum circuli Localis.

Hic eſt Locus cujus conſtructionem exhibet Eutocius in commentariis in Praefationem Apollonii ad Lib. 1. Conicorum, quamque per ambages nimias ibi demonſtrat, unde Hugenius in Lemmate 5. Dioptricae, huic merito praefert Schootenii demonſtrationem. Quare eidem conſtructioni, bonae quidem, quaeque forſitan eſt ipſius Apollonii, ſed cui Sciolus quidam demonſtrationem illam longam ſubjunxit, viſum eſt ſequentem breviorem aptare.

Propoſitio, ut apud Eutocium habetur pag. 11. Conicorum Apollonii, ex edit. Cl. Halleii, ita enunciatur:

Datis duobus punctis in plano, et data ratione inaequalium recta

ru m

rum: poteſt in plano circulus deſcribi, ita ut rectae a datis punctis ad circumferentiam circuli inclinatae, habeant rationem eandem datae rationi.

Sint data puncta A, B; ratio autem data, quam habet EF ad FG, ſitque EF major: et oporteat facere quod propoſitum eſt.

Jungatur AB, et ad partes B producatur, et fiat ut EF ad FG, ita FG ad FH; rurſus fiat ut EH ad AB, ita HF ad BD, et FG ad DK. Quoniam igitur eſt EH ad AB, ut HF ad BD, erit [12. 5.] EF ad AD, ut (EH ad AB, hoc eſt, ut) FG ad DK, et ut HF ad BD. et, permutando, erit EF ad FG, ut AD ad DK; ut vero GF ad FH, ita KD ad DB. et proportionales ſunt EF, FG, FH; quare et AD, DK, DB ſunt proportionales [11. 5.]. Centro D, intervallo DK, circulus deſcribatur, et in circumferentia ſumatur quodvis punctum C, et jungantur CA, CB, CD. Quoniam igitur eſt AD ad DK ſeu DC, ut DC ad DB; et ſunt circa eundem angulum latera proportionalia, erit [6. 6.] triangulum ADC ſimile ipſi CDB: ergo eſt AC ad CB, ut AD ad DC ſeu DK, hoc eſt, ut EF ad FG.

Apud Eutocium addita eſt demonſtratio, quâ oſtenditur, rectas a punctis A,B ad punctum quod non eſt in circumferentia circuli KC ductas, non habere rationem eandem rationi EF ad FG. et quidem neceſſarium hoc eſſet, ſi analyſis praemiſſa non fuiſſet. Ex ea enim conſtat, punctum ad quod rectae a punctis A, B ductae, habent rationem eandem quam EF ad FG, fore in circumferentia circuli KC. Unde ſi ſumatur punctum quod, ex hypotheſi, non ſit in ea circumferentia, oſtendetur prorſus, ut in analyſi, idem eſſe in circumferentia, quod eſt abſurdum. Et hoc in aliis omnibus Locis obſervandum.

Idem aliter ſine ope Lemmatis.

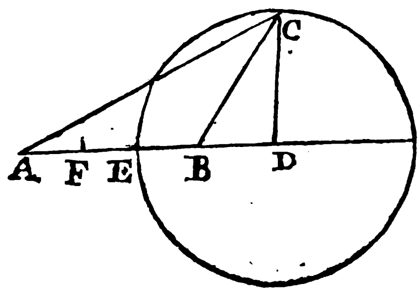
A punctis datis A, B, inflectantur inaequales AC, BC datam habentes rationem; oſtendendum eſt punctum C tangere circumferentiam poſitione datam.

Ducatur a puncto C, ad ipſam AB productam, recta CD faciens

 angulum

Digitized by Google

angulum BCD aequalem ipſi BAC; aequiangula igitur ſunt ADC, DCB triangula; quare, ut AC ad CB, ita AD ad DC, et ita DC ad DB. In AD ſumatur ED aequalis ipſi DC, et quoniam proportionales ſunt AD, ED, BD, erit AD ad DE, ut reliqua AE ad reliquam EB. data autem eſt, ex hypotheſi, ratio AC ad CB, hoc eſt, ratio AD ad DC ſeu DE; quare dabitur ratio AE ad EB; et data eſt AB, quare dabitur AE, et punctum E. et quoniam data eſt ratio AD ad DE, dabuntur AD, DE ſeu DC, et punctum D. Quoniam igitur a dato puncto D ducta eſt DC magnitudine data; tanget punctum C circumferentiam poſitione datam, per Prop. I. Lib. I. huj.



Componetur vero ita.

Secetur AB in E ita ut AE habeat ad EB datam rationem; et fiat AD ad DE, ut AE ad EB; centroque D, intervallo DE, deſcribatur circulus; erit circumferentia ejus, Locus quaeſitus. A punctis enim A, B ad quodvis in ea punctum ducantur AC, BC, et jungatur DC. Et quoniam eſt AD ad DE, ut AE ad EB, erit [19. 5.], AD ad DE, ut DE ad DB. eſt autem DC aequalis ipſi DE, ergo aequiangula ſunt ADC, CDB triangula, [6. 6.] et propterea eſt AC ad CB, ut (AD ad DC ſeu DE, hoc eſt, ut) AE ad EB, hoc eſt, in data ratione.

Cor. I. Quoniam eſt AE ad EB, ut AD ad DE, erit, (factâ EF aequali ipſi EB,) dividendo, AF ad FE, ut AE ad ED, et ita erit reliqua FE ſeu EB ad reliquam BD; quae eſt conſtructio Schootenii.

Cor. II. Propter eandem proportionem ſc. AD ad DE, ut AE ad EB; ſequitur, convertendo, eſſe AD ad AE, ut AE ad AF.

Digitized by Google

Prop. III.

Si ſit recta poſitione data, et in ipſa datum ſit punctum; unde ducatur quaedam recta terminata; ab hujus autem termino ducatur perpendicularis ad rectam poſitione datam: ſit vero quadratum ex [primo] ducta aequale rectangulo contento data recta et intercepta vel inter perpendicularem et datum punctum, vel inter perpendicularem et aliud datum punctum in recta poſitione data: terminus ductae tanget circumferentiam poſitione datam.

Vel magis generaliter.

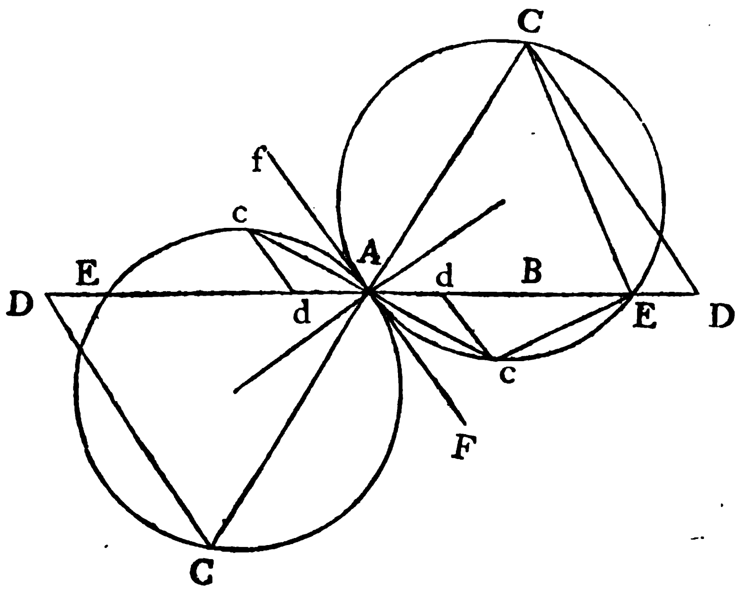
Si a dato puncto ducatur recta linea, ab ejus autem termino ducatur ad rectam poſitione datam, recta parallela poſitione datae rectae; ſit vero quadratum ex primo ducta aequale rectangulo contento data recta, et ſegmento rectae poſitione datae, inter ſecundo ductam et datum punctum: tanget terminus primo ductae circumferentiam poſitione datam.

Cas. 1. Quando recta poſitione data, ad quam ducenda eſt recta a termino primò ductae, tranſit per punctum datum a quo ducta eſt prima recta; et eidem dato puncto adjacet ſegmentum abſciſſum rectâ, quae ducta eſt a termino primò ductae.

Sit datum punctum A in recta AB poſitione data, et ductâ AC, a termino ejus C ducatur ad AB recta CD parallela rectae poſitione da-

tae;

tae; et ſit quadratum ex AC aequale rectangulo EAD, contento datâ rectâ AE, et ſegmento AD inter CD et punctum A: tanget punctum C circumferentiam poſitione datam.



Jungatur enim CE, et quoniam quadratum ex AC aequale eſt rectangulo EAD, erit EA ad AC, ut AC ad AD; quare [6. 6.] aequiangula ſunt EAC, CAD triangula; datus autem eſt angulus ADC, quoniam CD parallela eſt poſitione datae, quare datus eſt ACE; et data eſt recta AE poſitione et magnitudine, et punctum A datum eſt; quare et E, [27. dat.]. ideoque tangit punctum C circumferentiam poſitione datam, per Prop. 2. Lib. 1. hujus.

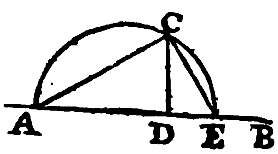
Componetur vero ita.

Sit A punctum datum, et in poſitione data AB, ad utramque partem ſumatur AE, aequalis datae rectae, et ſit AF recta, cui parellelae ducen-

Digitized by Google

ducendae ſunt ad AB, et ad contrarias partes rectae AB ad quas eſt recta AF, ſuper AE deſcribatur [33. 3.] ſegmentum circuli quod capiat angulum aequalem ipſi EAF; idemque fiat ad alteram AE; erunt horum circumferentiae Locus quaeſitus; hoc eſt, ſi ad quodvis in ipſis punctum C, ducatur a puncto A recta AC, et ad rectam AB ducatur a puncto C recta CD parallela ipſi AF, erit quadratum ex AC aequale rectangulo EAD. Quoniam enim angulus CDA aequalis eſt alterno DAF, hoc eſt, ipſi ACE, aequiangula erunt DAC, CAE triangula; quare eſt EA ad AC, ut AC ad AD, et propterea quadratum ex AC aequale eſt rectangulo EAD.

Cor. Hinc ſi a puncto C ad rectam AE poſitione et magnitudine datam ducatur perpendicularis CD; fueritque quadratum ex CD aequale rectangulo ADE contento ſegmentis ipſius AE; tanget C circumferentiam circuli ſuper diametrum AE deſcripti. Addendo enim utrinque quadratum ex AD, erunt quadrata ex AD, DC, hoc eſt, quadratum ex AC aequale rectangulo EAD. Ergo per hunc caſum tanget C circumferentiam ſuper diametrum AE. Idem aliter oſtenditur a Pappo, Lemmate 2. in Lib. 1. Conicorum Apollonii.

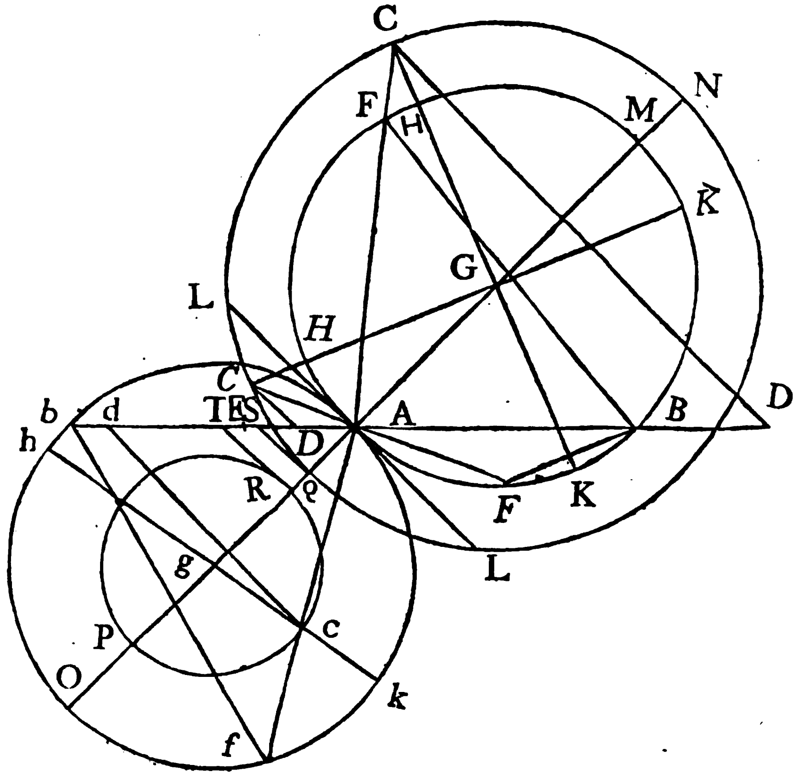


Cas. 2. Quando recta poſitione data, ad quam ducenda eſt recta a termino primò ductae, tranſit, ut in praecedente caſu, per punctum datum, a quo ducta eſt prima recta; aliud autem datum eſt punctum, cui adjacet ſegmentum abſciſſum rectâ parallelâ poſitione datae.

Sit AB recta poſitione data, et in ipſa data ſint duo puncta A, E; a puncto autem A ducatur AC recta, et a termino ejus C, ad AB ducatur CD, parallela poſitione datae; ſitque quadratum ex AC aequale rectangulo contento data recta AB, et ſegmento DE, inter CD et datum punctum E: tanget punctum C circumferentiam poſitione datam.

Primo,

Primo, Cadat punctum D in recta AE producta verſus partes A. Quoniam igitur quadratum ex AC aequale, ex hypotheſi, eſt rectan-



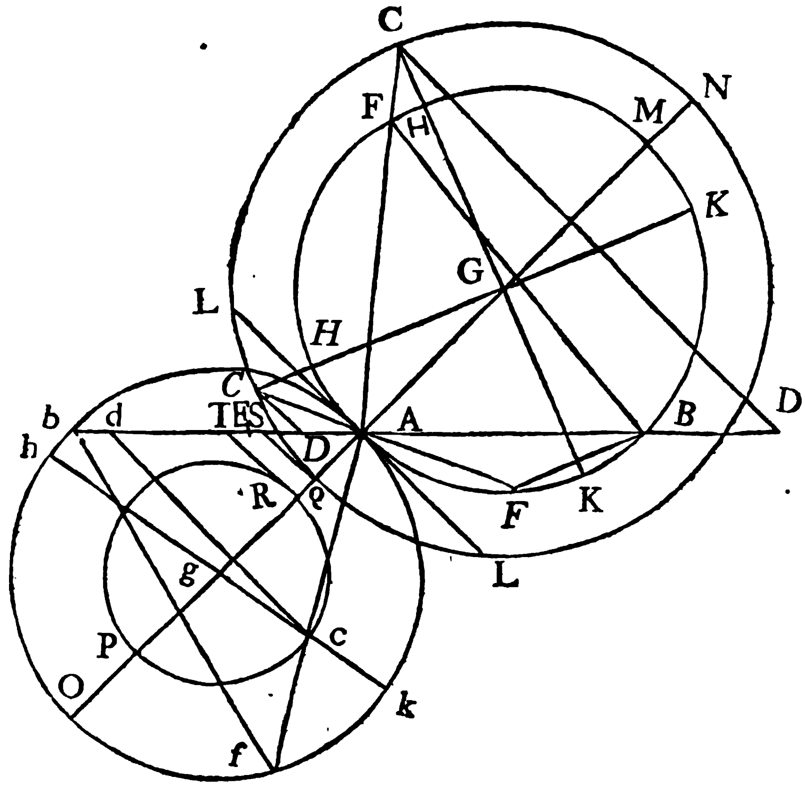
gulo contento ipſis AB, DE, hoc eſt [1. 2.] rectangulis BAD, BAE; ſi ipſi BAD aequale fiat rectangulum CAF, erit, ablatis aequalibus rectangulis CAF, BAD, reliquum rectangulum [3. 2.] ACF aequale ipſi BAE. Datum eſt autem BAE, propter datas AB, AE; quare datum eſt rectangulum ACF. jungatur BF, et, propter aequalia rectangula BAD, CAF, erit BA ad AF, ut AC ad AD; quare [6. 6.] aequiangula ſunt BAF, CAD triangula; et angulus propterea AFB aequalis eſt dato angulo ADC; et dantur A, B puncta, ergo tangit punctum F circumferentiam poſitione datam, ſuper AB deſcriptam; per

per Prop. 2. Lib. 1. hujus. Deſcribatur, ſitque centrum ejus G, et CG jungatur, circulo in H, K occurrens. data igitur magnitudine eſt GH, et quadratum ex ipſa datum. datum etiam eſt rectangulum KCH, aequale ſc. ipſi ACF [36. 3.] quod datum oſtenſum fuit. Quare quadratum ex GH una cum rectangulo KCH datum eſt, hoc eſt, quadratum ex GC [6. 2.] datum; quare data eſt recta GC; ſed et G punctum; tangit propterea punctum C circumferentiam poſitione datam, per Prop. 1. Lib. 1. huj.

Secundo, Ductis *AC*, *CD*, ut dictum fuit, cadat punctum *D* in ipſa recta AE; et quoniam, ex hypotheſi, quadratum ex *AC* aequale eſt rectangulo contento ipſis AB, *DE*, addito rectangulo BA*D*, erit quadratum ex A*C* una cum BA*D* rectangulo, aequale dato rectangulo BAE. producta autem *C*A ad *F*, ita ut rectangulum *C*A*F* aequale ſit ipſi BA*D*, erit quadratum ex A*C* una cum rectangulo BA*D* aequale [3. 2.] rectangulo A*CF*; quare datum eſt A*CF*. Juncta autem B*F*, oſtendetur, ut in primo articulo hujus caſus, angulum A*F*B aequalem eſſe dato angulo A*DC*. quare punctum *F* tangit circumferentiam in praecedente articulo deſcriptam, cujus centrum eſt G; et, ut in eo articulo, oſtendetur punctum *C* tangere circumferentiam ejuſdem circuli quam oſtenſum fuit punctum C tangere.

Tertio, Ductis A c, c d, ut dictum fuit, cadat punctum d in recta AE producta ad partes E, ponatur vero A b aequalis ipſi AB ad contrarias partes puncti A. et quoniam, ex hypotheſi, quadratum ex A c aequale eſt rectangulo contento ipſis Ab, d E; addito rectangulo b AE, erit quadratum ex A c una cum b AE rectangulo, aequale rectangulo b A d; huic aequale ſit rectangulum c A f, producta ſc. A c ad f; et quoniam quadratum ex A c una cum rectangulo b AE, aequale eſt ipſi c A f, quibus commune eſt quadratum ex A c; erit reliquum b AE rectangulum aequale reliquo A c f, quod propterea datum erit. Jungatur b f, et propter aequalia rectangula b A d, c A f, aequiangula erunt triangula b A f, c A d; quare angulus A f b aequalis eſt dato angulo A d c; et data ſunt A, b puncta, ergo tangit

f circumferentiam poſitione datam [Prop. 2. Lib. 1. huj.]. Deſcribatur, ſitque centrum ejus g punctum, et c g jungatur, quae circulo



in h, k occurrat. datum igitur eſt quadratum ex k g, hoc eſt rectangulum k c h una cum quadrato ex g c, et datum eſt rectangulum k c h aequale ſc. dato rectangulo A c f [35. 3.]; quare et reliquum, quadratum ſc. ex g c, datum eſt. data igitur eſt magnitudine recta g c, et datum eſt g punctum; tangit propterea punctum c circumferentiam poſitione datam, per Prop. 1. Lib. 1. huj.

Quoniam vero ut Locus inveniatur in hoc tertio articulo requiritur ut rectangulum k c h, quod aequale eſt dato rectangulo A c f ſeu bAE, aufera-

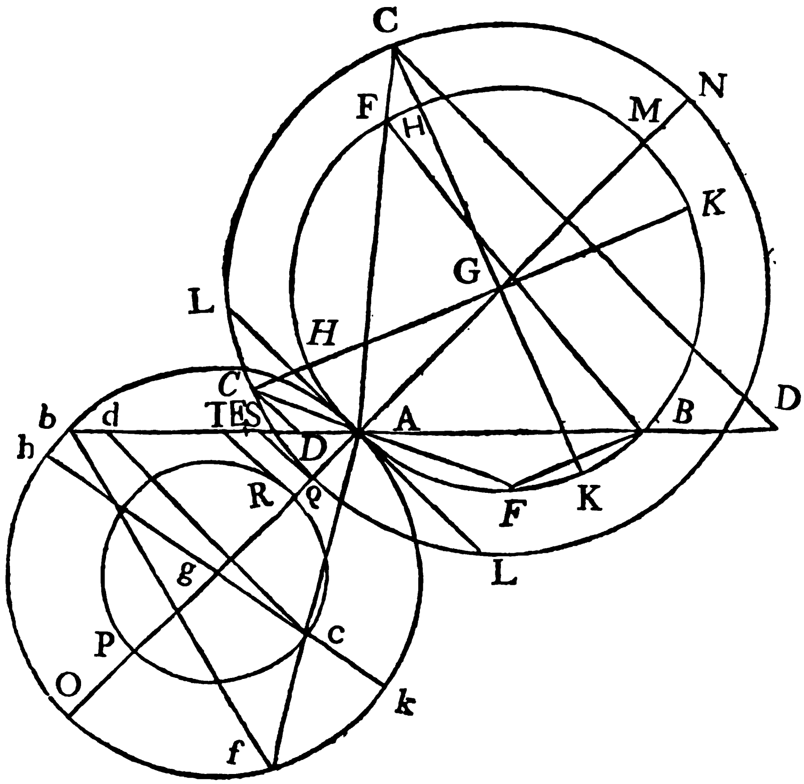
auferatur ex quadrato quod fit ex kg, quod non ſemper fieri poteſt, ideo Locus in hoc articulo non ſemper conſtrui poteſt; ſi vero acciderit datum rectangulum bAE aequale eſſe quadrato quod fit a kg ſeu Ag ſemidiametro ſc. circuli cujus ſegmentum ſuper datam rectam Ab capit angulum aequalem dato angulo Adc, unicum punctum g propoſito ſatisfaciet. At ſi rectangulum bAE majus fuerit quadrato ex Ag, Locus nullibi invenietur. Si igitur requiratur ut rectae cd parallelae poſitione datae, occurrant rectae AE productae ad partes E, neceſſe eſt ut rectangulum bAE minus ſit quadrato ex Ag, his praemiſſis, Locus

Componetur ita.

Sit AB recta poſitione data, et data in ipſa ſint puncta A, E, et in EA producta ad partes A ſumatur AB aequalis rectae datae, cui ad contrarias partes aequalis ponatur Ab, ſit vero AL recta cui parallelae ducendae ſunt rectae ad ipſam AB. Et deſcribatur circulus cujus ſegmentum ſuper AB capiat angulum aequalem ipſi BAL, ſitque centrum ejus G, et diameter AGM. ipſi vero AM applicetur rectangulum ANM, aequale dato rectangulo BAE, excedens quadrato. et, centro G, intervallo GN, deſcribatur circulus LCN. Et ſi rectangulum BAE minus fuerit quadrato ex AG, producatur MA ad O ut aequales ſint AM, AO; et ipſi AO applicetur rectangulum APO, aequale rectangulo BAE deficiens quadrato, et bifariam ſecta AO in g, centro g et intervallo gP deſcribatur circulus cP. erunt horum circumferentiae Locus quaeſitus, hoc eſt, ſi ad quodvis in ipſis punctum C ducatur a puncto A recta AC, et a puncto C ad AB ducatur CD parallela ipſi AL; erit quadratum ex AC aequale rectangulo contento data recta AB, et ſegmento DE inter D, et datum punctum E.

Primum vero oſtendendum eſt punctum E eſſe inter rectas QS, RT quae circulos contingunt in punctis Q, R, quibus recta Gg ipſis occurrit. Jungi intelligantur BM et bO, et quoniam aequales ſunt anguli AQS, ABM, uterque enim eſt rectus [18. et 31. 3.], aequiangula erunt triangula AQS, ABM; quare rectangulum BAS aequale eſt

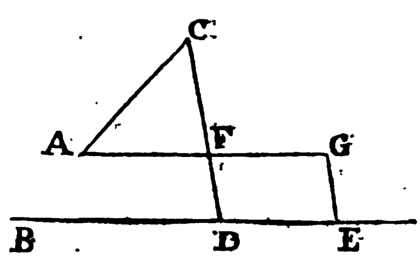
ipſi MAQ ſeu AMN. rectangulum autem BAE ſeu ANM majus eſt ipſo AMN, ergo BAE majus eſt ipſo BAS, et recta AE major AS.



Similiter oſtendetur rectangulum BAT aequale ipſi MAR, ſeu AOP; eſt autem BAE, ſeu APO, minus AOP ſeu BAT. ergo AE minor eſt AT, et propterea punctum E eſt inter S et T. Quoniam vero angulus BAL aequalis eſt ipſi AMB in ſegmento alterno, contingit AL circulum ABM [conv. 32. 3.], quare parallelae ſunt AL, QS, RT. quaevis igitur recta a puncto in circulo LN ducta parallela ipſi AL, hoc eſt contingenti QS, neceſſario occurret vel rectae EA, vel ipſi ad partes A productae. quaevis autem a puncto in circulo PR ducta eidem AL, hoc eſt ipſi RT parallela occurret rectae AT productae verſus

verſus T. Sumatur igitur punctum quodvis C in circulo LN, a quo ducta CD, ipſi AL parallela, occurrat, primo, rectae EA productae verſus partes A, et ducta AC, occurrat circulo BKM in F et BF jungatur. ex conſtructione igitur eſt angulus AFB aequalis angulo BAL, hoc eſt alterno ADC, quare aequiangula ſunt AFB, ADC triangula et propterea rectangulum CAF aequale eſt ipſi BAD. Eſt autem, ducta ſc. CHGK, rectangulum ACF aequale (ipſi KCH, hoc eſt, ipſi ANM, hoc eſt, ex conſtructione) ipſi BAE. rectangulum igitur CAF ſimul cum ipſo ACF, hoc eſt quadratum ex AC aequale eſt rectangulis BAD, BAE, hoc eſt contento ipſis AB, DE. Secundo, Ductis *AC*, *CD*, ut prius. Occurrat *CD* ipſi AE, et iiſdem conſtructis oſtendetur rectangulum *CAF* aequale ipſi B*AD*; rectangulum autem A*CF* aequale ipſi BAE; ergo reliquum ſc. quadratum ex *AC* aequale eſt reliquo rectangulo contento ipſis AB, *D*E. Tertio, Ducatur A c ad punctum quodvis c in circulo PR, et c d ducatur parallela ipſi AL; occurret igitur c d rectae AT productae ad partes T, quoniam ſc. RT contingit circulum; iiſdemque conſtructis, oſtendetur, ut prius, rectangulum b A d aequale ipſi c A f, hoc eſt quadrato ex A c et A c f rectangulo ſimul. eſt autem A c f aequale (ipſi k c h, hoc eſt ipſi APO, hoc eſt, ex conſtructione) ipſi b AE; eſt igitur rectangulum b A d, aequale quadrato ex A c et rectangulo b AE ſimul, et ablato communi b AE, erit rectangulum contentum ipſis b A, d E aequale quadrato ex A c.

Cas. 3. Quando recta poſitione data ad quam ducenda eſt recta a termino primò ductae, non tranſit per punctum a quo ducta eſt prima recta.

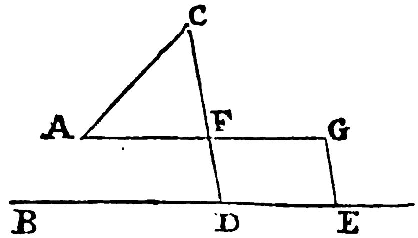


Datum ſit punctum A, et recta BE poſitione in qua datum eſt punctum E, et ductâ AC, a termino ejus C ducatur ad EB recta CD, rectae poſitione datae parallela; ſit autem quadratum ex AC, aequale rectangulo contento data recta EB, et ſegmento DE inter

CD

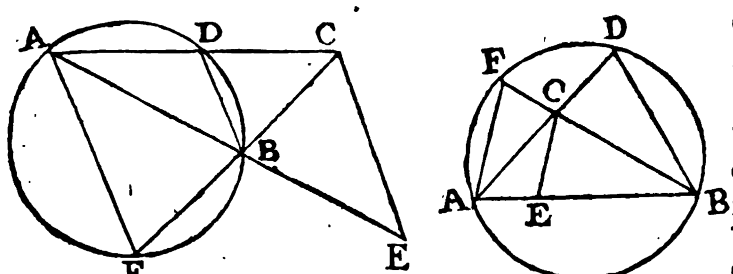
CD et datum punctum E. Tanget punctum C circumferentiam poſitione datam.

Per punctum A ducatur recta ipſi BE parallela, occurratque CD in F, et per punctum E ducatur ad AF recta EG ipſi CD parallela. quoniam igitur poſitione data eſt BE, poſitione dabitur AF [28. dat.]. et quoniam per datum punctum E, ducta eſt EG parallela ipſi CD, quae rectae poſitione datae parallela eſt, dabitur poſitione EG; quare datum eſt punctum G. eſt autem FG aequalis ipſi DE; quoniam igitur a dato puncto A ducta eſt AC, et a termino ejus C, ad poſitione datam AG, ducta eſt CF parallela poſitione datae, et eſt quadratum ex AC aequale rectangulo contento data recta EB, et ſegmento FG, inter CF et datum punctum G; oſtendetur punctum C tangere circumferentiam poſitione datam, ut in primo vel ſecundo caſu praecedente.

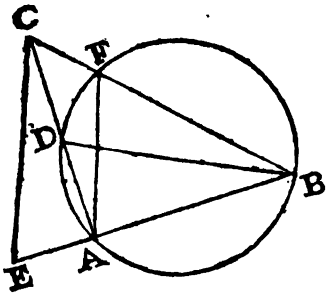


LEMMA III.

Sit triangulum ABC, et punctum D in latere AC, vel in eo producto; et ut rectangulum ACD ad quadratum ex BC, ita ſit AE ad EB; et BD, CE jungantur. Si punctum E ſit in AB producta ad partes B, punctum vero D inter A et C; vel ſi E fuerit inter A, B puncta, et D in AC producta ad partes C; erit angulus BDC



BDC aequalis angulo BCE. Si vero punctum E fuerit in AB producta ad partes A, et D inter A, C puncta; erit angulus BDA, qui ſc. deinceps eſt ipſi BDC, aequalis angulo BCE. et contra, ſi anguli fuerint aequales, erit rectangulum ACD ad quadratum ex BC, ut AE ad EB.



Ducatur enim per A recta ipſi CE parallela, occurratque CB in F; et quoniam rectangulum ACD eſt ad quadratum ex BC, ut (AE ad EB, hoc eſt, propter parallelas, ut FC ad CB, hoc eſt, ut) FCB rectangulum ad quadratum ex BC; erit rectangulum ACD aequale rectangulo FCB. Ergo in circulo ſunt A, D, B, F puncta, et angulus BDC in caſu primo et ſecundo aequalis erit ipſi AFB, hoc eſt angulo BCE. at in caſu tertio angulus ADB aequalis erit ipſi AFB, hoc eſt angulo BCE.

Et contra, ſi angulus BDC, vel in tertio caſu, angulus ADB aequalis fuerit ipſi BCE, hoc eſt angulo AFB; erunt puncta A, D, B, F in circulo, et propterea rectangulum ACD aequale ipſi FCB. et eſt FCB ad quadratum ex BC, ut FC ad CB, hoc eſt, ut AE ad EB.

Lemma IV.

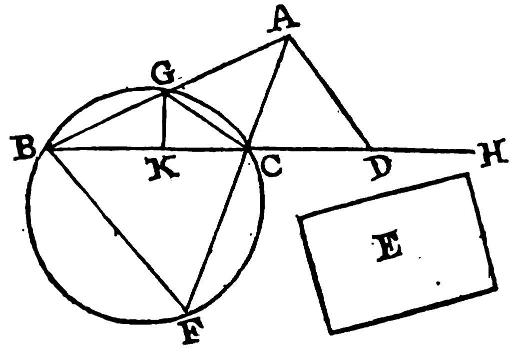
Lemma hoc eſt Propoſitio cxxi lib. ſeptimi Pappi Alexandrini et ipſius Lemma 3. in librum ſecundum Apollonii.

Sit triangulum ABC, et quadratum ex BA quadrato ex AC ſit dato majus, quam in ratione. datum autem E. et ratio ſit BD ad DC. Dico rectangulum DBC ſpatio E majus eſſe.

Auferatur

Digitized by Google

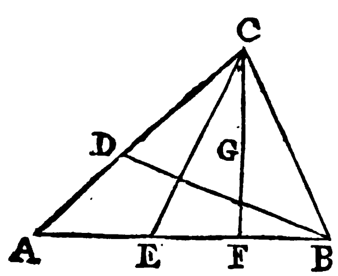
Auferatur enim datum ſpatium, quod ſit ABG *rectangulum:* reliqui igitur, videlicet rectanguli BAG, ad quadratum ex AC ratio eſt data, nempe eadem quae BD ad DC. ponatur rectangulo BAG aequale rectangulum FAC. erit rurſus reliqui rectanguli FAC ad quadratum ex AC, hoc eſt rectae lineae FA ad AC, ratio eadem quae BD ad DC. ergo



AD ipſi BF eſt parallela; et idcirco angulus F eſt aequalis angulo CAD. ſed angulus F aequalis eſt angulo AGC, *quoniam puncta B, G, C, F ſunt in circulo.* quare angulus AGC angulo CAD eſt aequalis. atque eſt angulus ADH major angulo CAD. angulus igitur ADH eſt major angulo AGC. *ductâ igitur GK quae faciat angulum AGK aequalem ipſi ADH erunt puncta A, G, K, D in circulo.* ergo rectangulum DBC, *quod majus eſt DBK,* hoc eſt, rectangulo ABG, dato ſpatio E majus erit.

PROP. IV.

SI a duobus punctis datis inflectantur [duae] rectae, et ſit quadratum unius quadrato alterius dato, majus quam in ratione; tanget punctum [occurſus] rectam lineam aut circumferentiam poſitione datam.



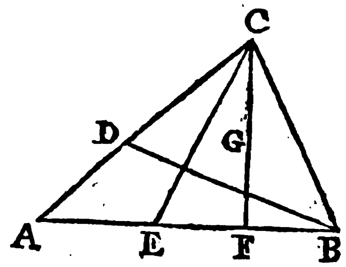
CAS. I. Quando ratio data eſt aequalis ad aequale.

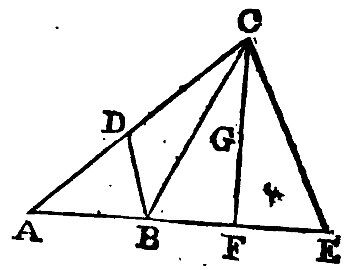
Sint A, B data puncta, et inflectantur AC, BC; ſit autem quadratum ex AC majus quadrato ex BC dato, quam in ratione aequalis ad aequale; tanget punctum C rectam lineam poſitione datam.

Quoniam

Digitized by Google

Quoniam quadratum ex AC majus eſt quadrato ex BC, dato, quam in ratione aequalitatis; auferatur datum ſpatium ſc. rectangulum CAD, et [def. 11. dat.] reliquum rectangulum ACD, aequale erit quadrato ex BC. quare eſt AC ad CB, ut CB ad CD, anguluſque ABC aequalis erit [6. 6.] angulo BDC. ſit rectangulum BAE aequale dato ſpatio CAD, et propter datam AB dabitur AE, et punctum E, puncta vero B, C, D, E, erunt in circulo. angulus igitur BEC, vel qui ipſi eſt deinceps, aequalis eſt angulo BDC [21. aut 22. 3.] hoc eſt angulo ABC. quare aequales ſunt rectae BC, EC, et dantur B, E puncta; ergo tangit punctum C rectam poſitione datam, quae ſc. bifariam, et ad rectos angulos, ſecat ipſam BE; per caſ. 1. Prop 2. Lib. 2. hujus.



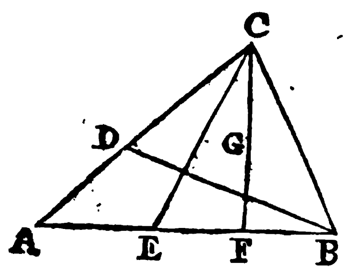


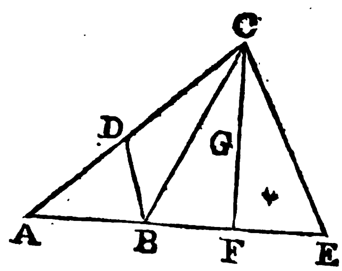
Componetur vero ita.

Sit datum ſpatium aequale rectangulo BAE, et bifariam ſecta BE in F, ad rectos angulos eidem ducatur FG. Erit haec Locus quaeſitus, hoc eſt, ſi a punctis A, B inflectantur ad FG quaevis rectae AC, BC, erit quadratum ex AC majus quadrato ex BC, dato rectangulo BAE. Quoniam enim quadratum ex AC majus eſt quadrato ex AF, idem multo magis rectangulo BAE majus erit [6. 2.]. applicato igitur, ad AC, rectangulo CAD aequali ipſi BAE, cadet punctum D inter A et C. ablato autem rectangulo CAD, ex quadrato quod fit ab AC, reliquum rectangulum ACD, quadrato ex BC aequale oſtendendum eſt. Jungantur BD, CE; et propter aequalia rectangula BAE, CAD, in circulo erunt B, D, C, E puncta; igitur angulus BDC aequalis eſt (angulo BEC, vel ei qui ipſi deinceps eſt, hoc eſt, propter aequales CB, CE) angulo CBA. quare aequiangula ſunt ABC, BDC triangula, et propterea rectangulum ACD aequale eſt quadrato ex BC.

Digitized by Google

Locus autem in hoc caſu idem prorſus eſt cum Loco in Prop. 1. Lib. hujus 2. addita autem fuit haec ſolutio propter ſimilitudinem ejus cum ſolutione caſus ſequentis. et quidem veroſimile eſt caſum hunc a junioribus a ſequente caſu 2. ſeparatum fuiſſe, et ut Locum primum Libri hujus 2. poſitum, cum apud veteres is, qui nunc ſecundus Locus numeratur, fuerat primus, ut patet ex Prop. 119. Lib. 7. Pappi Alexandrini, cui haec praemittuntur, viz. " Locorum " Planorum Liber ſecundus. In primum " Locum ſecundi Libri." Manifeſtum autem eſt Propoſitionem hanc 119. Lemma eſſe in Locum qui apud Pappum, in praefatione ad Librum ſuum ſeptimum, ſecundus habetur. Sequenti propoſitioni 120^{mae} praefigitur hic Titulus " In Locum ſecun-" dum." et hanc ſequenti praefigitur " In eundem ſi non fuerit propor-" tio aequalis ad aequale." Propoſitio autem 120ma, Lemma eſt in Locum qui, apud Pappum, primus hujus Libri ſecundi dicitur, altera vero, 121ma, ſolo Loco qui, apud Pappum in praedicta praefatione, 4^{tus} numeratur, convenire poteſt. Manifeſtum propterea eſt Locum ſecundum apud Veteres conflatum fuiſſe ex iis qui nunc in prima et quarta, ſecundum Pappi numerationem, habentur. Adde, Apollonium, poſtquam contemplatus fuerat Locum concurſus rectarum, a duobus datis punctis inflexarum quae, et propterea quadrata ex ipſis, datam habent rationem; recte huic ſubjunxiſſe Locum concurſus rectarum a datis duobus punctis, quarum ex una quadratum majus eſt quadrato ex altera dato, quam in ratione. Lemma autem apud Pappum quartum, ſine dubio, Loco ſuo excidit, quintum enim et ſextum inſervire huic praeſenti Loco, cui inſerviunt ſecundum et tertium, ex ſequentibus in hac Propoſitione perſpicue videbitur. Locus autem qui nunc 5^{tus} eſt, apud veteres tertius fuiſſe videtur, et qui nunc tertius, apud veteres quartus

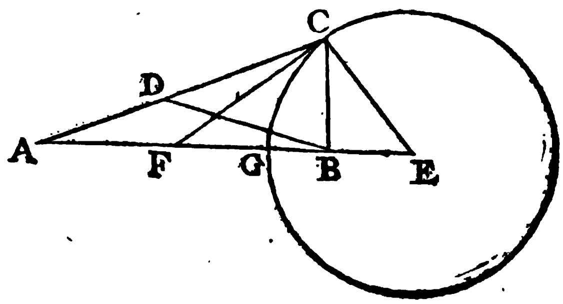


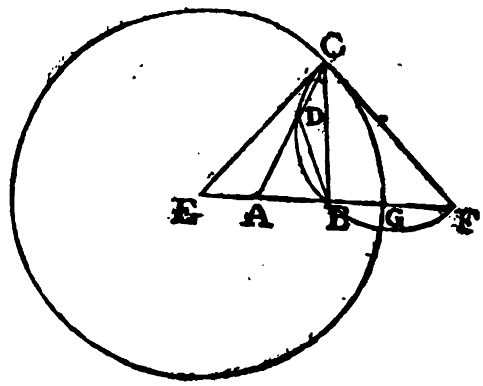


quartus. nam ex eo Locus qui nunc ſextus, hoc eſt apud veteres quintus, omnino dependet.

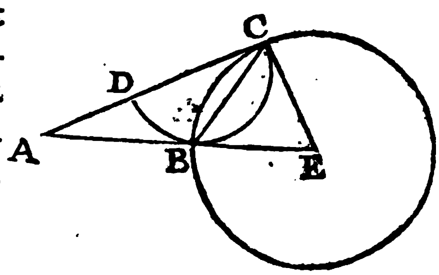
Cas. 2. Quando ratio data, non eſt aequalis ad aequale.

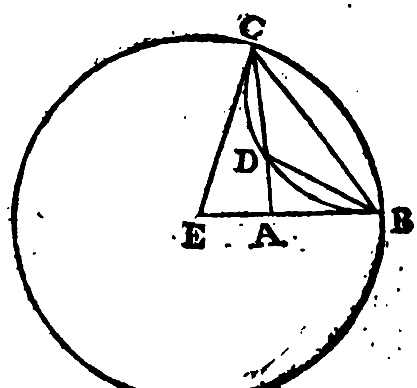
Sit quadratum ex AC, majus quadrato ex BC dato, quam in ratione, et non ſit ratio aequalis ad aequale; tanget punctum C circumferentiam poſitione datam.





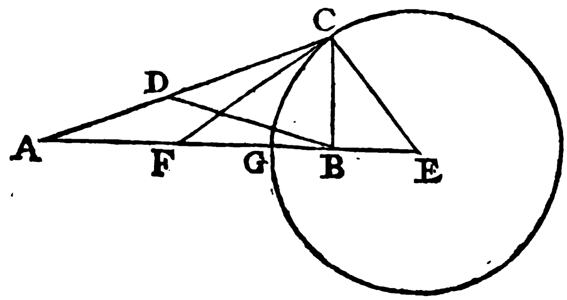
Sit enim ſpatium datum aequale rectangulo CAD, ergo [def. 11. dat.] data eſt ratio reliqui rectanguli ACD ad quadratum ex BC. Jungatur AB, et in hac ratione ſit AE ad EB, ſit autem punctum E in AB producta. et propter datam poſitione, et magnitudine AB, dabitur AE et punctum E; quare, per Lem. 3. junctis BD, CE angulus BDC, vel, qui ipſi eſt deinceps, BDA, aequalis erit angulo BCE. rectangulum vero CAD vel aequale, vel non aequale, eſt quadrato ex AB. Sit primo aequale; igitur circulum circa triangulum

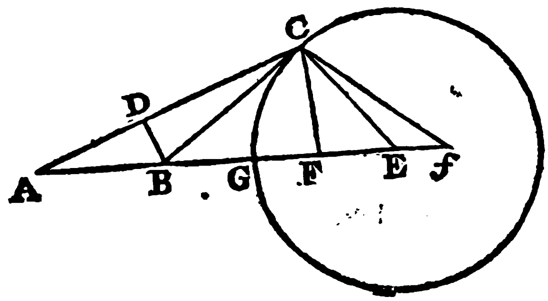




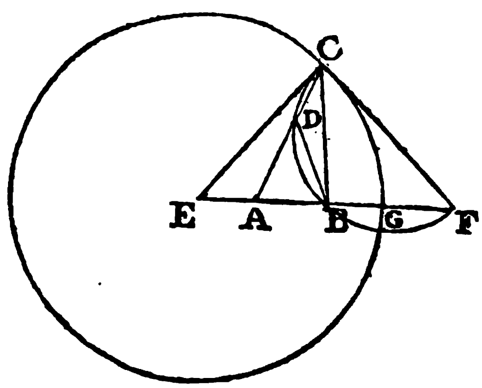
BDC deſcriptum continget recta AB [37. 3.], quare angulus EBC aequalis erit angulo BDC in ſegmento alterno,

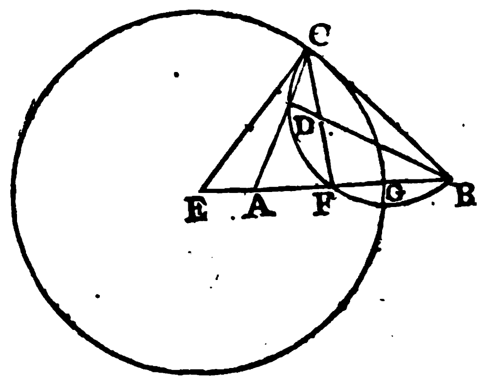
vel ei qui ipſi deinceps eſt, angulo ſc. BDA [22. 3.] hoc eſt, in utroque caſu, angulo BCE. aequalis igitur eſt EC, datae magnitudine rectae EB; et datum eſt E punctum; ergo tangit punctum C circumferentiam poſitione datam, per Prop. 1. Lib. 1. hujus.





Secundo, Sit rectangulum CAD majus aut minus quadrato ex AB, ipſique aequale ſit rectangulum BAF, et propter datam AB, dabitur AF et punctum F. puncta autem B, F, D, C ſunt in circulo, quia aequalia ſunt rectangula praedicta; quare, junctâ CF, aequalis erit angulus EFC angulo BDC, vel angulo BDA, hoc eſt, in utroque caſu, angulo BCE. aequiangula propterea ſunt





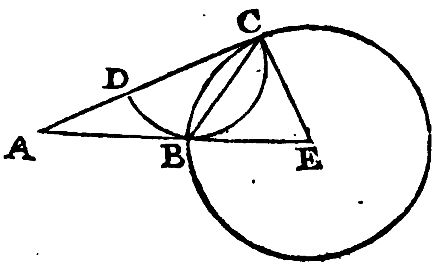
triangula FEC, CEB; ergo quadratum ex EC aequale eſt rectangulo FEB. datum autem eſt FEB, quare datum eſt quadratum ex EC, et ipſa EC magnitudine dabitur; et datum eſt punctum E; ergo tangit punctum C circumferentiam poſitione datam, per Prop. 1. Lib. 1. huj.

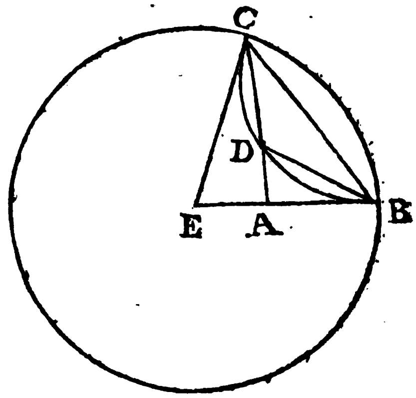
Componetur

Digitized by Google

Componetur vero ita.

Sit rectangulum BAF aequale ſpatio dato, et ratio AE ad EB aequalis rationi datae, quae ſi fuerit majoris ad minorem, cadet punctum E in AB producta ad partes B; in eadem vero ad partes contrarias producta, ſi fuerit ratio minoris ad majorem. Et primo, ſi ſpa-

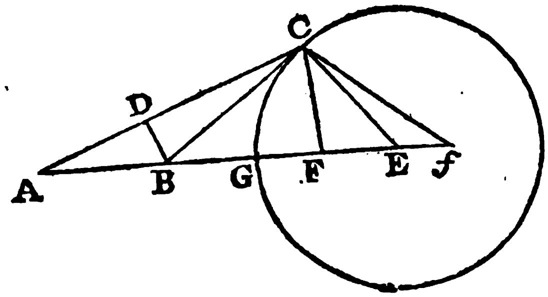




tium datum aequale ſit quadrato ex AB, hoc eſt, ſi punctum F cadat in B; centro E, intervallo EB, deſcribatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaeſitus; hoc eſt, ſi a punctis A, B ad quodvis in ipſa punctum inflectantur AC, BC, erit quadratum ex AC majus quadrato ex BC, dato quadrato ex AB, quam in ratione AE ad EB. jungatur enim EC, et quoniam AC major eſt AB [8. aut 7. 3.]; ſi quadrato ex AB, aequale fiat rectangulum CAD, cadet punctum D inter A et C. juncta autem BD, recta AB circulum, circa triangulum BDC deſcriptum, continget in B [37. 3.]. ergo angulus BDC, vel, qui ipſi eſt deinceps, BDA aequalis eſt angulo EBC [32. 3.], hoc eſt, ipſi ECB. quare per Lemm. 3. rectangulum ACD, hoc eſt, exceſſus quadrati ex AC ſupra datum rectangulum CAD, eſt ad quadratum ex BC ut recta AE ad ipſam BE.

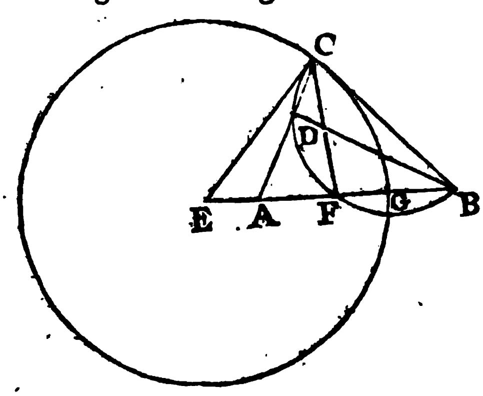
Sit jam rectangulum BAF, ſeu ſpatium datum, majus aut minus quadrato ex AB. Quoniam vero requiritur ut puncta B, D, C, F ſint in

in circulo, et ita quidem ut angulus EFC inde oſtendatur aequalis BDC, quod ſc. vel ſint in eodem ſegmento, vel alter eorum oppoſitus



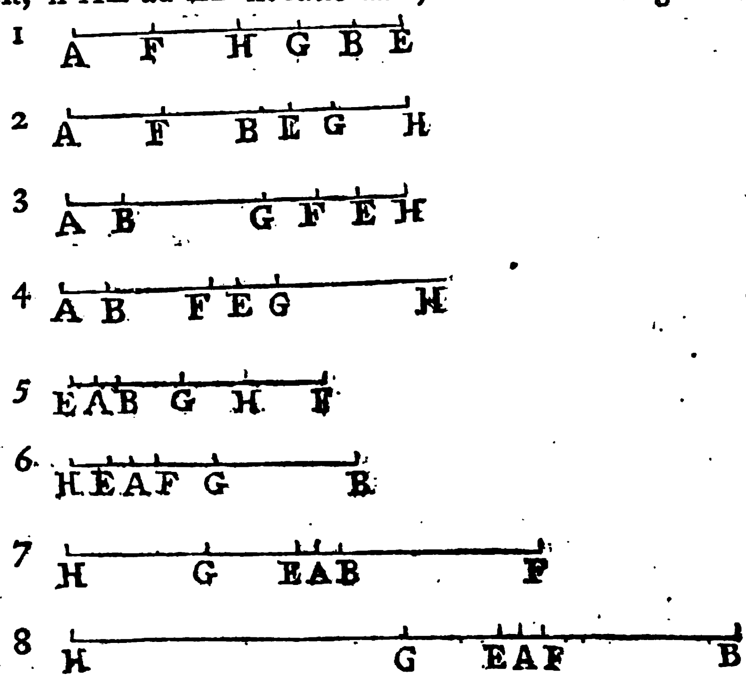
ſit alteri exteriori in quadrilatero; quod fieri non poteſt in caſu quo ratio data eſt majoris ad minorem, niſi punctum F cadat inter A, E puncta. nam ſi ponatur F cadere ultra punctum E, ut in *f*, eſſent anguli E*f*C, BDC oppoſiti in quadrilatero in circulo, unde ipſos aequales eſſe minime oſtendi poterit. neceſſe igitur eſt punctum F cadat inter A, et E, et propterea ut rectangulum datum BAF, minus ſit rectangulo BAE. Et haec eſt determinatio quam Pappus aliter oſtendit in praecedente Lemmate 4to, in caſu ſc. quo ratio data eſt majoris ad minorem. In caſu enim altero nulla eſt determinatio ſpatii dati; poterit enim majus aut minus eſſe quolibet ſpatio dato.

Sit igitur rectangulum datum BAF in praedicto caſu minus rectangulo BAE, et inter EB, EF inventâ media proportionali EG, centroque E, intervallo EG, deſcripto circulo, erit circumferentia ejus Locus quaeſitus; hoc eſt, ſi a punctis A, B ad quodvis in ipſa punctum inflectantur AC, BC, erit quadratum ex AC majus quadrato ex BC, dato rectangulo BAF, quam in ratione AE ad EB. jungantur enim EC et FC, et quoniam ex conſtructione rectangulum BEF aequale eſt quadrato ex EG, hoc eſt ex EC; recta EC continget in C circulum circa triangulum BCF deſcriptum [37. 3.]. et quoniam eſt punctum A extra hunc circulum ad eaſdem partes contingentis EC, ad quas eſt circulus, neceſſe eſt ut recta AC eidem rurſus occurat inter



ter A et C puncta [16. 3.] Occurrat ei in D, et jungatur BD. rectangulum igitur CAD aequale eſt ipſi BAF; ablato autem CAD, ex quadrato quod fit ab AC, reliquum eſt rectangulum ACD. et quoniam B, C, D, F puncta ſunt in circulo, angulus BDC, vel, qui ipſi eſt deinceps, angulus BDA aequalis eſt ipſi EFC, hoc eſt, propter aequiangula triangula BEC, CEF, [6. 6.] angulo BCE. ergo per Lemm. 3. rectangulum ACD eſt ad quadratum ex BC, ut AE ad EB. et eſt ACD exceſſus quadrati ex AC ſupra ſpatium datum rectangulum ſc. BAF.

Reſtat autem idem oſtendere de punctis in quibus Locus occurrit rectae AB. hoc eſt, ſi AE ad EB ſit ratio data, et BAF rectangulum ſit ſpatium datum, et EG media proportionalis inter EB, EF; oſtendendum eſt quadratum ex AG majus eſſe quadrato ex BG, quam in ratione AE ad EB, rectangulo BAF; hoc eſt, exceſſum quadrati ex AG ſupra BAF rectangulum eſſe ad quadratum ex BG, ut AE ad EB.



fiat GH aequalis ipſi GB, et quoniam proportionales ſunt FE, GE, BE erit (in fig. 1. 5. per 19. 5. et dividendo. in fig. 2. 6. per 19. 5. et dividendo inverſe (a). At in fig. 3. 4. 7. 8. per 12. 5. et componendo.)

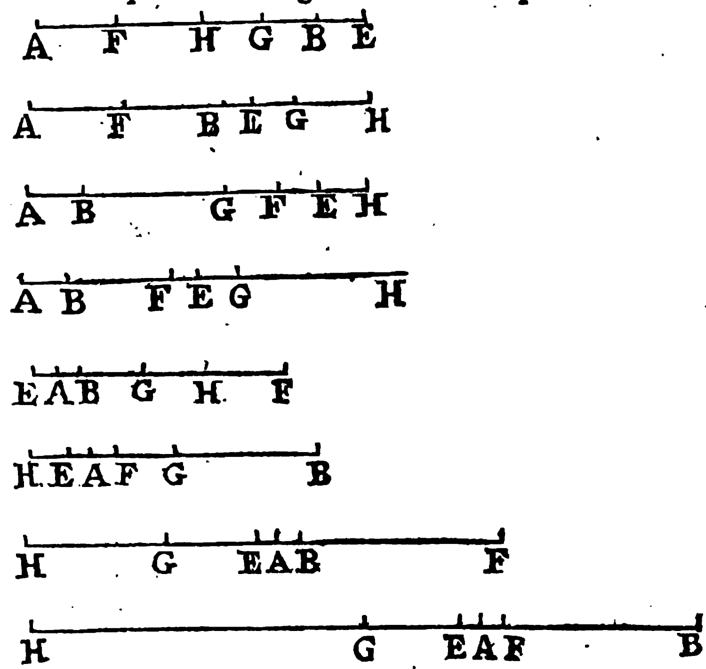
(a) hoc eſt quando infertur, ut exceſſus 2dae ſupra primam ad 2dam, ita exceſſus 4tae ſupra 3tiam ad quartam.

FH

Digitized by Google

FH ad BG, ut BG ad BE. quadratum igitur ex BG aequale eſt rectangulo contento BE, FH. et propter aequales BG, GH, erit in fig. 1, 2, 3, 4 quadratum ex AG aequale (rectangulo BAH una cum quadrato ex BG [6. 2.], hoc eſt rectangulo BAF; contento BA, FH; et, contento BE, FH; hoc eſt) rectangulo BAF, et ei quod AE, FH continetur. at in 5, 6, 7. 8, quoniam quadratum ex BG aequale eſt rectangulo (contento BE, FH, hoc eſt, per 1. 2.) contento EA, FH, ſimul cum contento, AB, FH; ſi in 5 addatur rectangulum BAH, et in 6, 7, 8 idem auferatur utrinque, erit [6, 5. 2.] quadratum ex AG aequale rectangulo BAF una cum contento AE, FH. eſt igitur rectangulum AE, FH, exceſſus quadrati ex AG, ſupra rectangulum BAF. et eſt rectangulum AE, FH ad quadratum ex BG, hoc eſt ad rectangulum EB, FH, ut AE ad EB, quod erat oſtendendum.

1 2 3 4 5 6 7 8



Pappus Alexandrinus eadem in duobus caſibus fig. 1 et 3. demonſtrat, viz. in Propoſitionibus cxxiii, cxxiv Lib. 7. quas, ut nihil omittamus eorum quibus elegantiſſimus Geometra Libros hos illuſtravit, hic adjiciemus; ut ſimul quo ſpectabant, cuique Propoſitioni inſerviebant Lemmata haec, quae Geometras a Pappi tempore, ut videtur, latuere, plene intelligatur.

Prop.

Prop. cxxiii. Lib 7. Collectionum Mathem. Pappi Alexandrini fol. 235. edit. 1588. quaeque debet eſſe ipſius Lemma 4tum, non 5tum, ut apud Commandinum habetur.

Proportione exiſtente AB ad BC, et ſpatio CA, AD contento; ſi ipſarum DB, BC media proportionalis BE ſumpta fuerit; oſtendendum eſt quadratum ex AE quadrato ex EC majus eſſe, quam in proportione AB ad BC, rectangulo CAD.



Fiat enim ut AB ad BC, ita alia quaepiam FE, ad EC. ob proportionem igitur et dividendo, ut AC ad CB, ita eſt FC ad CE. quare et tota AF ad totam BE, eſt ut AC ad CB, et permutando, ut FA ad AC, ita EB ad BC. ut autem EB ad BC, ita DE ad EC, quod BE ſit media proportionalis. ut igitur FA ad AC, ita eſt DE ad EC, et ſpatium ſpatio aequale. ergo quod continetur AF, EC, aequale eſt contento AC, DE. ſed quod AF, EC, continetur, excedit rectangulum AEC rectangulo FEC; et quo rectangulum AF, EC excedit rectangulum AEC, eo et rectangulum AC, DE idem rectangulum excedit. rectangulum igitur AC, DE majus eſt quam rectangulum AEC, rectangulo FEC. ſed quo rectangulum AC, DE excedit rectangulum AEC, eo et quadratum ex AE rectangulum CAD excedit (a). ergo quadratum ex AE majus eſt quam rectangulum CAD, rectangulo FEC. rectangulum autem FEC ad quadratum ex EC eandem proportionem habet quam AB ad BC. quadratum igitur ex AE quadrato ex EC majus eſt quam in proportione AB ad BC, rectangulo CAD.

Prop. cxxiv. Lib. 7. Pappi Alexandrini et ipſius Lem. 5tum, non 6tum, ut apud Commandinum.

Sit proportio AB ad BC, ſpatium vero contentum CAD. ſi ipſarum DB, BC, media proportionalis ſumatur BE. dico quadratum ex AE

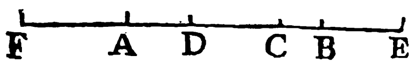


(a) Eſt enim rectangulum contentum AC, DE, una cum ipſo CAD aequale (rectangulo CAB, hoc eſt) quadrato ex AE una cum rectangulo AEC.

Digitized by Google

quadrato ex EC majus eſſe, quam in proportione AB ad BC, rectangulo CAD.

Fiat enim ut AB ad BC, ita alia quaedam FE ad EC, dividendo igitur, et reliqua ad reliquam, eſt ut



FA ad BE, ita AC ad CB. et permutando, ut FA ad AC, ita EB ad BC. Ut autem EB ad BC, ita DE ad EC, *quod BE ſit media proportionalis.* ergo et ut FA ad AC ita DE ad EC; et ſpatium ſpatio aequale. quod igitur FA, CE continetur aequale eſt contento AC, DE. commune apponatur rectangulum AEC una cum rectangulo CAD, quare totum, viz. quadratum ex AE, eſt aequale toti, rectangulo FEC una cum CAD. quadratum igitur ex AE quadrato ex EC majus eſt, quam in proportione AB ad BC, rectangulo CAD. etenim FEC rectangulum ad quadratum ex EC eandem proportionem habet.

Clariſſimus Fermatius * exiſtimat Pappum hoc loco omiſiſſe propoſitionem praecedenti ſimilem viz.

St a duobus punctis datis inflectantur duae rectae, et ſit quadratum unius quadrato alterius dato minus, quam in ratione: tanget punctum *occurſus* circumferentiam poſitione datam.

Probe autem ſciebat Apollonius Locum hunc omnino in praecedenti contineri. Si enim magnitudo, alterâ minor ſit datâ, quam in ratione; et viciſſim haec major erit illâ datâ quam in ratione; ut oſtenſum fuit in Prop. 24. Lib. 1. hujus. et propter hanc rationem Euclides, qui in Libro Datorum propoſitiones plures tradit, de magnitudinibus quae aliis majores ſunt datâ, quam in ratione, nullas tamen adfert de iis quae aliis minores ſunt data quam in ratione, quoniam ſc. in iſtis continentur. Poteſt vero et Propoſitio haec, omnino ad modum praecedentis, ſine ope hujus Lemmatis demonſtrari, ut Fermatius in loco citato oſtendit.

Eſt etiam tertius Locus hiſce ſimilis, ſimilemque reſolutionem habens, cujus neque Fermatius neque Schootenius meminit, pariter cum illis utilis; ad neutram tamen illorum deduci poteſt. ſc.

* Fermatii varia opera Mat. p. 33.

PROP.

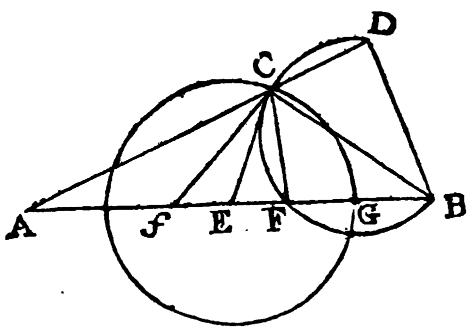
Digitized by Google

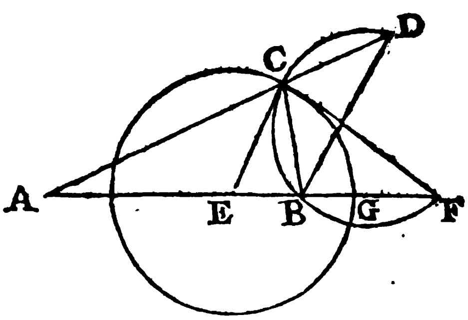
Prop. A.

Si a duobus punctis datis inflectantur duae rectae, et datum ſit quadratum unius, ſimul cum eo ad quod quadratum alterius datam habet rationem. tanget punctum concurſus circumferentiam poſitione datam.

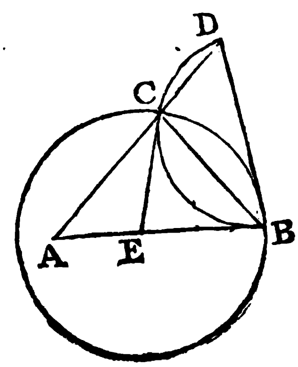
Sint A, B puncta data, et inflectantur AC, BC, datumque ſit quadratum ex AC, ſimul cum eo ad quod quadratum ex BC datam habet rationem: tanget punctum C circumferentiam poſitione datam.

Sit enim ſpatium datum aequale rectangulo CAD, hoc eſt, quadrato ex AC, et rectangulo ACD. ergo, ex hypotheſi, datur ratio ipſius ACD ad quadratum ex BC. Secetur AB in E, ut in hac ratione ſit AE ad EB; et propter datam poſitione et magnitudine AB,





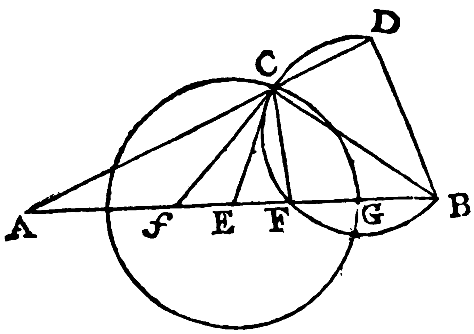
dabitur AE et punctum E. Junctis vero BD, CE, erit, per Lem. 3. angulus BDC aequalis ipſi BCE. rectangulum vero CAD vel aequale, vel non aequale eſt quadrato ex AB. Sit primo aequale, igitur circulum circa triangulum B D C deſcriptum continget recta A B in B [37. 3.], quare angulus E B C aequalis erit angulo B D C [22. 3.], hoc eſt, angulo B C E. aequalis igitur eſt EC ipſi EB. data autem eſt EB, punctumque E datum eſt; ergo tangit punctum C circumferentiam poſitione datam, per Prop. 1. Lib. 1. hujus.

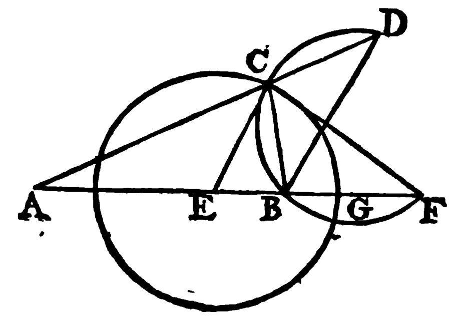


Secundo,

Digitized by Google

Secundo, ſit rectangulum CAD majus aut minus quadrato ex AB, ipſique aequale ſit rectangulum BAF, et propter datam AB, dabitur

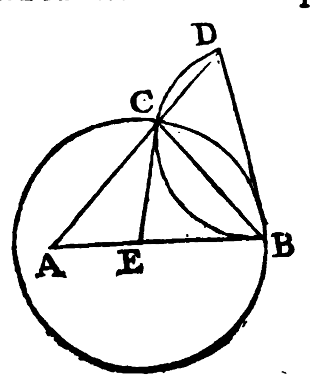




AF, et punctum F. quoniam vero aequalia ſunt rectangula BAF, CAD, in circulo erunt puncta B, F, D, C. Juncta igitur CF, aequalis erit angulus EFC ipſi BDC, hoc eſt, angulo BCE, quare aequiangula ſunt triangula FEC, CEB. ergo quadratum ex EC aequale eſt rectangulo FEB. datum autem eſt FEB, quare datum eſt quadratum ex EC, et ipſa EC magnitudine; et datum eſt punctum E; ergo tangit punctum C circumferentiam poſitione datam, per Prop. 1. Lib. 1. huj.

Componetur vero ita.

Sit rectangulum BAF aequale ſpatio dato, et ratio AE ad EB eadem rationi datae. et primo, ſi ſpatium datum aequale ſit quadrato ex AB, hoc eſt, ſi punctum F cadat in B; centro E, intervallo E B, deſcribatur circulus, erit hujus circumferentia Locus quaeſitus, hoc eſt, ſi a punctis A, B, ad quodvis in ipſa punctum inflectantnr AC, BC, erit quadratum ex AC, ſimul cum eo ad quod quadratum ex BC datam habet rationem A E ad E B, aequale quadrato ex A B. Jungatur enim E C, et quoniam AC minor eſt AB [7. aut 8. 3.], ſi quadrato ex



AB,

Digitized by Google

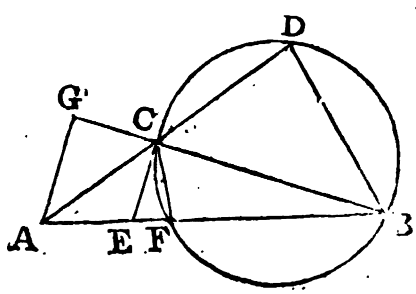
AB, aequale fiat rectangulum CAD, cadet punctum D in AC producta ad partes C. Juncta autem BD, recta AB circulum circa triangulum BDC deſcriptum continget in B [37. 3.]; ergo angulus BDC aequalis eſt angulo EBC [32. 3.], hoc eſt, ipſi ECB. quare per Lem. 3. rectangulum ACD eſt ad quadratum ex BC, ut AE ad BE. et eſt quadratum ex AC, una cum rectangulo ACD, aequale rectangulo CAD, hoc, eſt quadrato ex AB.

Sit jam rectangulum BAF majus aut minus quadrato ex AB. et quoniam requiritur ut puncta B, C, D, F ſint in circulo, et ita quidem ut angulus EFC inde oſtendatur aequalis angulo BDC, quod fieri non poteſt niſi punctum F cadat in AE producta verſus E; nam ſi ponatur cadere inter A, E, ut in *f*, eſſent anguli E*f*C, BDC oppoſiti in quadrilatero in circulo, unde ipſos aequales eſſe minime oſtendi poterit; neceſſe igitur eſt punctum F cadat in AE producta verſus E, et propterea, ut rectangulum datum BAF majus ſit rectangulo BAE; quod etiam aliter oſtendi poterit ope Lemmatis ſequentis.

Lemma V.

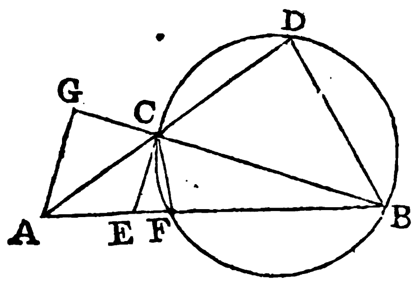
Sit triangulum ABC, et quadratum ex AC una cum eo, ad quod quadratum ex BC datam habet rationem, aequale ſit dato ſpatio, rectangulo ſc. CAD; et ſit data ratio eadem rationi AE ad EB, exiſtente puncto E inter A, B, puncta. erit rectangulum CAD majus ipſo BAE.

Rectangulo CAD, aequale fiat rectangulum BAF, poſita ſc. AF ab A verſus B. rectangulo autem ACD aequale fiat rectangulum BCG. quoniam igitur quadratum ex AC una cum rectangulo ACD, aequale eſt ſpatio dato CAD, erit ACD rectangulum, hoc eſt, rectangulum BCG, id ad quod quadratum ex BC datam habet rationem AE ad EB. eſt autem

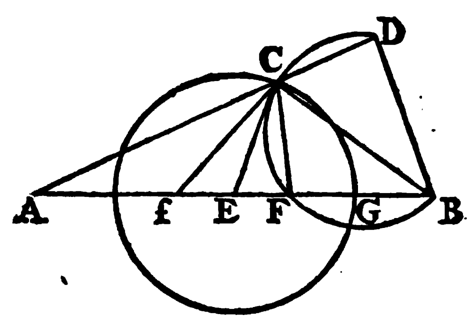


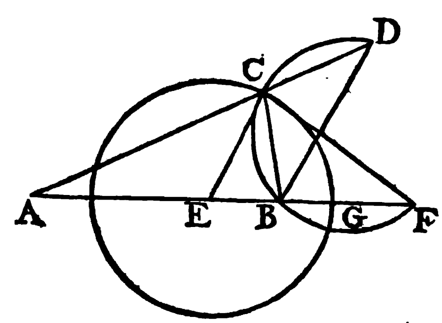
BCG

BCG rectangulum ad quadratum ex BC, ut GC ad CB. ut igitur GC ad CB, ita AE ad EB; quare juncta AG parallela eſt junctae CE; anguluſque ECB aequalis erit ipſi AGB, hoc eſt ipſi ADB; puncta enim A, G, D, B, ſunt in circulo propter aequalia rectangula ACD, GCB. et quoniam CAD, BAF rectangula ſunt inter ſe aequalia, erunt B, F, C, D puncta in circulo. angulus igitur ACF aequalis eſt ipſi FBD; major autem eſt FBD angulo CBD, hoc eſt angulo GAD, hoc eſt ipſo ACE. quare angulus ACF major eſt angulo ACE, et AF propterea major eſt ipſa AE. ergo rectangulum BAF, ſeu CAD, majus eſt ipſo BAE.



Sit igitur ſpatium datum, rectangulum ſc. BAF, majus ipſo BAE, et inter EB, EF media proportionalis inveniatur EG. centro E, in-



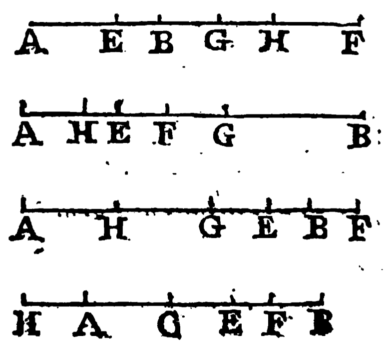


tervallo EG, deſcripto circulo, erit hujus circumferentia Locus quaeſitus; hoc eſt, ſi a punctis A, B ad quodvis in ipſa punctum C, inflectantur AC, BC; erit quadratum ex AC, ſimul cum eo ad quod quadratum ex BC datam habet rationem AE ad EB, aequale dato rectangulo BAF. Jungantur enim EC, FC; et quoniam ex conſtructione rectangulum BEF aequale eſt quadrato ex EG, hoc eſt, ex EC, recta EC continget circulum circa triangulum BCF deſcriptum [37. 3.]. eſt autem punctum A extra circulum ad partes contingentis EC, contrarias

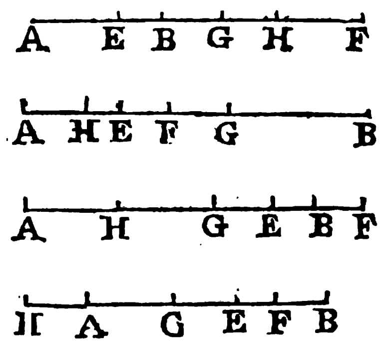
Digitized by Google

contrarias iis ad quas eſt circulus, quare recta AC eidem occurret in puncto aliquo in AC producta verſus partes C. occurrat ei in D, et BD jungatur, rectangulum igitur CAD aequale eſt ipſi BAF. eſt autem CAD aequale quadrato ex CA, et rectangulo ACD ſimul. Oſtendendum igitur eſt eſſe rectangulum ACD ad quadratum ex BC, ut AE ad EB; quod quidem ita ſe habet, quoniam enim in circulo ſunt B, D, C, F puncta, eſt angulus BDC aequalis (ipſi EFC, hoc eſt, propter aequiangula triangula BEC, CEF,) angulo BCE. ergo, per Lemm. 3. eſt rectangulum ACD ad quadratum ex BC, ut AE ad EB.

Reſtat autem idem oſtendere de punctis in quibus Locus occurrit rectae AB. hoc eſt, ſi AE ad EB ſit ratio data, et BAF rectangulum ſit ſpatium datum, et EG media proportionalis inter EB, EF; oſtendendum eſt illud quod una cum quadrato ex AG aequale eſt rectangulo BAF, habere ad quadratum ex GB eandem rationem quam habet AE ad EB. fiat GH aequalis ipſi GB, et quoniam proportionales ſunt EF, EG, EB, erit (in fig. 1. per 19. 5. et dividendo; in 2. per 19. 5. et dividendo inverſe; in 3. 4. per 12. 5. et componendo) HF ad BG, ut BG ad EB. quadratum igitur ex GB aequale eſt rectangulo contento EB, HF. et propter aequales BG, GH erit, in caſibus quibus punctum H cadit inter A et F, rectangulum BAF aequale (ipſi BAH una cum contento, AB, HF; hoc eſt rectangulo BAH, contento EB, HF; et contento EA, HF; hoc eſt, rectangulo BAH, quadrato ex GB, et contento EA, HF; hoc eſt, 6. 2.) quadrato ex AG et rectangulo EA, HF. at in caſibus quibus punctum H eſt in FA producta ad partes A, eſt rectangulum contentum AB, HF aequale (contento AE, HF una cum contento EB, HF; hoc eſt,) contento AE, HF una cum quadrato ex BG. et ablato communi rectangulo BAH erit reliquum rectangulum



ctangulum BAF aequale reliquo rectangulo. ſc. AE, HF una cum quadrato ex AG [5. 2.]. eſt igitur rectangulum AE, HF illud quod una cum quadrato ex AG, aequale eſt dato rectangulo BAF. habet autem rectangulum AE, HF ad quadratum ex BG, hoc eſt, ad rectangulum EB, HF eandem rationem quam habet AE ad EB.



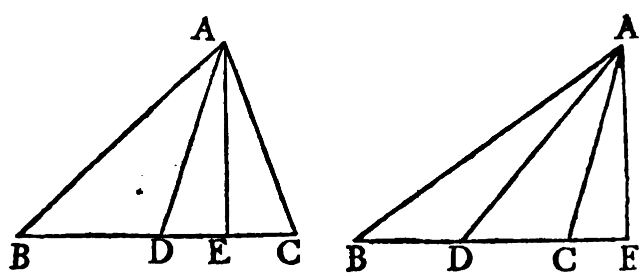
Locus autem hic, in caſu quo ratio data eſt aequalis ad aequale, idem eſt cum caſu primo Loci ſequentis in Prop. 5.

Lemma VI.

Quod eſt Prop. cxxii. Lib. 7. Pappi Alexandrini, et ipſius Lemma ſextum in Lib. 2. Apollonii, non quartum, ut apud Commandinum.

Sit triangulum ABC, et ducatur recta linea AD, quae ipſam BC bifariam ſecet. dico quadrata ex BA, AC quadratorum ex AD, DC dupla eſſe.

Ducatur perpendicularis AE; erunt quadrata ex BE, EC quadratorum ex BD, DE dupla [9. aut 10. 2.]. eſt autem et quadratum ex AE bis ſumptum, una cum quadrato ex DE bis ſumpto, duplum quadrati ex AD; et quadrata ex BE, EC una cum quadrato ex AE bis ſumpto, quadratis ex BA, AC ſunt aequalia [47. 1.]: quadrata igitur ex BA, AC quadratorum ex AD, DB, hoc eſt quadratorum ex AD, DC dupla erunt.



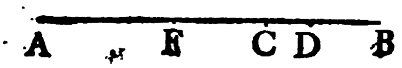
Lemma

Lemma VII.

Quod eſt Prop. cxxv. Lib. 7. Pappi Alexandrini, ipſiuſque Lemma 7.

Sit recta linea AB, et duo puncta C, D quorum C ſit inter A, B puncta. dico ſi quadratum ex AD, et id quod ad quadratum ex DB eandem proportionem habet, quam AC ad CB, componantur, fieri et quadratum ex AC, et id quod ad quadratum ex CB eandem habet proportionem quam AC ad CB, et inſuper id quod ad quadratum ex CD eandem quam AB ad BC proportionem habet.

Fiat enim ut AC ad CB ita FD ad DB. ergo et componendo, et reliqua ad reliquam, erit AF ad reliquam CD, hoc eſt, rectangulum contentum AF et CD, ad quadratum ex CD, ut AB ad BC. Quod igitur ad quadratum ex DB eandem proportionem habet, quam AC ad CB, eſt rectangulum FDB. et quod ad quadratum ex CB eandem habet proportionem, quam AC ad CB, eſt rectangulum ACB. Sed ad quadratum ex CD proportionem habens eandem, quam AB ad BC, eſt id quod AF, CD continetur. Itaque dico quadratum ex AD una cum rectangulo FDB aequale eſſe rectangulo BAC una cum eo, quod AF, CD continetur. auferatur enim commune rectangulum CAD. dico reliquum ADC rectangulum una cum FDB aequale eſſe ei, quod continetur AC, DB una cum contento AF, CD. rurſus commune auferatur rectangulum quod AF, CD continetur. dico rurſus, rectangulum FDC una cum FDB, hoc eſt, totum quod continetur FD, CB, aequale eſſe contento AC, DB: quod quidem ita ſe habet. ſunt enim quatuor rectae lineae AC, CB, FD, DB inter ſe proportionales.



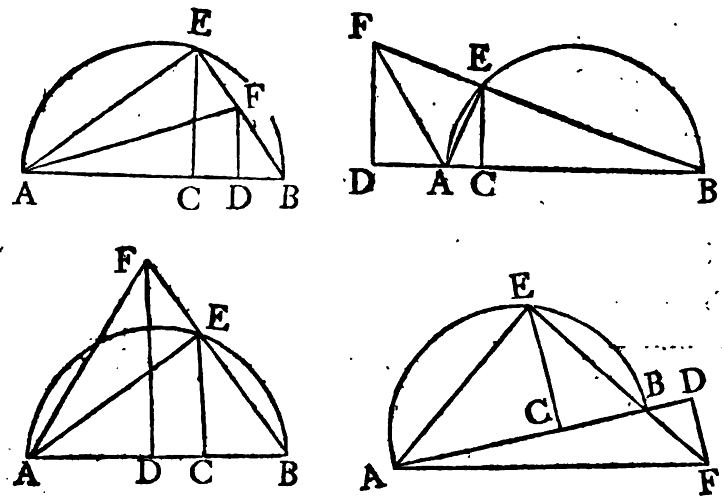
Haec eſt ipſius Pappi demonſtratio quae quidem inſervit caſui

Digitized by Google

quando punctum D eſt inter C,B puncta; poterit autem D eſſe etiam inter A, C puncta, vel in AB producta ad utraſvis partes; quatuor autem hi caſus, qui, ſequendo viam quâ Pappus utitur in eorum primo, diverſas requirerent demonſtrationes, ſimul demonſtrari poſſunt ut ſequitur.

Praecedentis Lemmatis 7. alia et magis generalis demonſtratio.

Super AB deſcripto ſemicirculo, ad circumferentiam ducatur CE ad rectos angulos ipſi AB, et jungantur AE, BE; ad BE vero ducatur DF parallela ipſi CE, et jungatur AF. Quadratum igitur ex DF eſt id quod ad quadratum ex DB, rationem habet eandem quam (quadratum ex CE



habet ad quadratum ex CB, hoc eſt quam) AC ad CB. et rectangulum ACB eſt id quod ad quadratum ex CB, eandem habet rationem quam AC ad CB. quadratum vero ex EF eſt id quod ad quadratum ex CD, rationem habet eandem quam (quadratum ex EB habet ad quadratum ex CB, hoc eſt, quam) AB ad BC. Igitur oſtendendum eſt eſſe quadrata ex AD, DF, ſimul aequalia quadrato ex AC, rectangulo ACB et quadrato ex EF, hoc eſt, quadratis ex AE, EF; quod quidem manifeſtum eſt, quoniam ex AF quadratum aequale eſt tam quadratis ex AD, DF quam quadratis ex AE, EF.

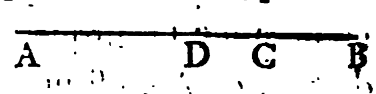
LEMMA

Digitized by Google

Lemma VIII.

Quod eſt Prop. cxxvi. Lib. 7. Pappi Alexandrini, ipſiuſque Lemma 8.

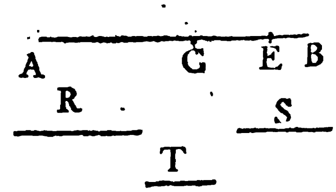
Sit recta linea AB poſitione et magnitudine data, et punctum ad libitum, ſumptum C; dabitur in ipſa AB punctum, ita ut quadratum ex AC, et id quod ad quadratum ex CB datam proportionem habet, aequale erit ſpatio dato, et ei quod ad quadratum ex recta linea interjecta inter datum punctum et punctum C proportionem habet datam.



Fiat enim proportio AD ad DB eadem quae proportio data. ergo et proportio AD ad DB data erit, et propterea datum eſt punctum D. Itaque quoniam recta linea eſt AB, et duo puncta D, C, erit, per Lem. praecedens, quadratum ex AC, et id quod ad quadratum ex CB proportionem habet eandem quam AD ad DB, hoc eſt datam, aequale quadrato ex AD, et proportionem habenti ad quadratum ex DB, eandem quam AD ad DB, (quae ſimul aequalia ſunt dato rectangulo BAD) et adhuc aequale ei quod ad quadratum ex DC eandem habet quam AB ad BD proportionem, quae ſc. data eſt.

Lemma IX.

Data poſitione et magnitudine recta AB, dabitur punctum ipſam in duo ſegmenta dividens quae ad datam rectam datas habebunt rationes.



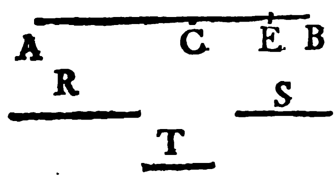
Sit ita, ſc. ſit punctum C, et recta CE. ergo, ex hypotheſi, data eſt ratio AC ad CE, ut et ratio CB ad CE, quare [8. dat.] dabitur ratio AC ad CB, ergo data eſt [6. dat.] ratio AB ad AC, et data eſt AB

Digitized by Google

poſitione et magnitudine, quare data eſt AC et punctum C; et propter datam rationem AC ad CE dabitur CE.

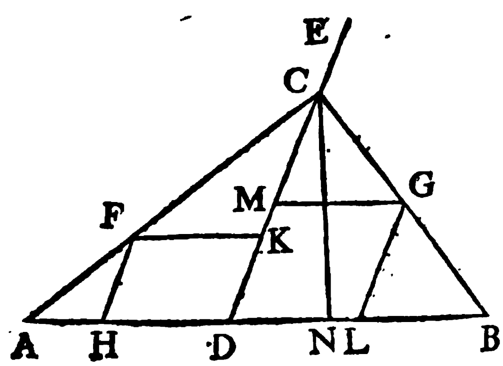
Componetur vero ita.

Sit data ratio quam habere debet AC ad CE aequalis rationi quam habet recta R ad rectam T, quam autem habere debet CB ad CE, aequalis ſit rationi S ad T; et dividatur AB in C, ita ut AC ſit ad CB, ut R ad S, ſumatur vero CE ad quam CB eſt ut S ad T, ergo ex aequo eſt AC ad CE ut R ad T.



Lemma X.

Sit triangulum ABC, et a vertice ad baſim AB, ducta ſit utcunque CD, ſitque DE quaevis recta; erit id quod ad quadratum ex AC eſt ut BD ad DE, una cum eo quod ad quadratum ex BC eſt ut AD ad DE; aequale ei quod ad quadratum ex AD eſt ut BD ad DE, et ei quod ad quadratum ex DB eſt ut AD ad DE, et inſuper ei quod ad quadratum ex DC eſt ut AB ad DE.



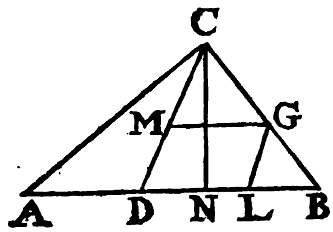
Fiat FC ad CA, ut BD, ad DE; et GC ad CB, ut AD ad DE; et compleantur parallelogramma DHFK, DLGM, et ad AB ducatur perpendicularis CN. eſt igitur rectangulum FCA id quod ad quadratum ex AC eſt ut (FC ad CA, hoc eſt, ut) BD ad DE; et rectangulum

gulum GCB id quod ad quadratum ex BC eſt ut (GC ad CB, hoc eſt ut) AD ad DE. rectangulum vero HDA eſt id quod ad quadratum ex AD, eſt ut (HD ad DA, hoc eſt, ut) BD ad DE; et rectangulum LDB eſt id quod ad quadratum ex DB, eſt ut (LD ad DB, hoc eſt, ut) AD ad DE. et quoniam KCD rectangulum eſt ad quadratum ex DC, ut (KC ad CD, hoc eſt, ut) BD ad DE; et eſt MCD rectangulum ad quadratum ex CD, ut (MC ad CD, hoc eſt, ut) AD ad DE; erit [24. 5.] rectangulum KCD una cum ipſo MCD ad quadratum ex DC, ut AB ad DE. oſtendendum igitur eſt rectangula FCA, GCB ſimul aequalia eſſe rectangulis HDA, LDB, KCD et MCD. quoniam eſt LD ad DB, ut AD ad DE, permutando erit LD ad DA, ut (DB ad DE, hoc eſt, ut FC ad CA, ſeu ut) DH ad DA; aequales propterea ſunt LD, DH. et propter parallelas, eſt rectangulum FCA ad quadratum ex AC, ut rectangulum HDA ad quadratum ex AD, et ut KCD ad quadratum ex DC, et ut duplum rectangulum HDN ad duplum ADN. et, per 12. 5. ut rectangulum FCA ad quadratum ex AC, ita rectangulum HDA una cum ipſo KCD et duplo rectangulo HDN, ad quadratum ex AD una cum quadrato ex DC et duplo rectangulo ADN. Eſt autem [12. 2.] quadratum ex AC aequale quadratis ex AD, DC, et duplo rectangulo ADN. ergo rectangulum FCA aequale eſt ipſis HDA, KCD, et duplo rectangulo HDN. ſimiliter omnino, quoniam [13. 2.] quadratum ex BC una cum duplo rectangulo BDN aequale eſt quadratis ex BD, DC; oſtendetur rectangulum GCB una cum duplo LDN aequale rectangulis LDB, MCD. igitur rectangula FCA, GCB una cum duplo LDN aequalia ſunt rectangulis HDA, LDB, KCD, MCD et duplo HDN; quorum duplum LDN aequale eſt duplo HDN. ergo reliquum, ſc. rectangula FCA, GCB, aequale eſt reliquo ſc. rectangulis HDA, LDB, KCD, MCD.

Si utraque ratio BD ad DE, et AD ad DE fuerit aequalis ad aequale, Lemma hoc idem eſt cum Lemmate 6to praecedente: ſi vero una tantum earum viz. BD ad DE fuerit aequalis ad aequale, Propoſitio in hoc caſu ita enunciabitur, et oſtendetur.

Si a vertice C trianguli ABC ducatur ad baſin recta CD; erit quadratum

dratum ex AC, una cum eo quod ad quadratum ex BC eandem habet rationem quam AD ad DB, aequale quadrato ex AD, una cum eo quod ad quadratum ex DB, eandem habet rationem quam AD ad DB, et inſuper ei quod ad quadratum ex DC eandem habet rationem quam AB ad BD, hoc eſt, rectangulo BAD, et ei quod ad quadratum ex DC rationem habet eandem quam AB ad BD.



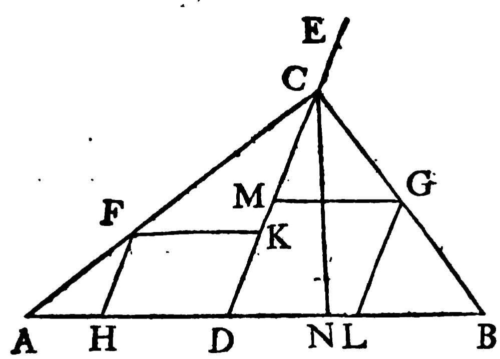
Ducatur CN perpendicularis ad AB, fiatque ut AD ad DB, ita GC ad CB, et ita, completo parallelegrammo DLGM, erit LD ad DB. aequalis igitur eſt AD ipſi DL. et eſt rectangulum GCB id quod ad quadratum ex BC, eſt ut GC ad CB, hoc eſt, ut LD ſeu AD ad DB. et rectangulum LDB ſeu ADB eſt id quod ad quadratum ex DB, eſt ut AD ad DB. Quoniam vero rectangulum MCD eſt ad quadratum ex CD, ut (MC ad CD, hoc eſt, ut GC ad CB, hoc eſt, ut) AD ad DB; erit componendo, quadratum ex CD una cum MCD rectangulo, ad quadratum ex CD, ut AB ad BD.

Itaque oſtendendum eſt quadratum ex AC una cum rectangulo GCB aequale quadrato ex AD, rectangulo ADB, quadrato ex CD et rectangulo MCD ſimul. Quoniam, propter parallelas, eſt rectangulum GCB ad quadratum ex CB, ut duplum rectangulum LDN ad duplum rectangulum BDN, et ut rectangulum LDB ſeu ADB ad quadratum ex DB, et ut rectangulum MCD ad quadratum ex CD; et eſt [13. 2.] quadratum ex CB una cum duplo rectangulo BDN aequale quadratis ex BD, DC; erit [per Lemm 2. Lib. 1. hujus] rectangulum GCB una cum duplo rectangulo LDN, aequale rectangulo ADB una cum rectangulo MCD. Eſt autem [12. 2.] quadratum ex AC aequale quadratis ex AD, DC, et duplo rectangulo ADN. ergo additis aequalibus, quadratum ex AC, una cum rectangulo GCB, et duplo rectangulo LDN, aequale eſt quadratis ex AD, DC, duplo rectangulo ADN, rectangulis ADB et MCD ſimul; quorum duplum rectangulum ADN aequale eſt duplo rectangulo LDN; ergo reliquum

Digitized by Google

quum, quadratum ſc. ex AC, una cum rectangulo GCB, aequale eſt reliquo, quadrato ſc. ex AD, rectangulo ADB, quadrato ex DC, et rectangulo MCD ſimul, ſeu rectangulo BAD, quadrato ex DC, et rectangulo MCD.

Cor. Hinc ſi data ſit AB poſitione et magnitudine, et datae ſint rationes rectanguli FCA ad quadratum ex AC, et rectanguli GCB ad quadratum ex BC; dabitur [Lem. 9.] punctum D, et recta DE, quae facient rationem AD ad DE aequalem datae rationi rectanguli GCB ad quadratum ex BC; et rationem BD ad DE aequalem rationi rectanguli FCA ad quadratum ex AC. datae igitur ſunt rectae AD, DB, et quadrata ex ipſis data erunt; quare et rectangula HDA, LDB quae ad quadrata illa datas habent rationes. et propterea rectangula FCA, GCB ſpatia ſc. quae ad quadrata ex AC, BC datas habent rationes, ſimul aequalia ſunt ſpatio dato (rectangulis ſc. HDA, LDB) et ei ſpatio (ſummae ſc. rectangulorum KCD, MCD) quod ad quadratum ex DC datam habet rationem AB ad DE.



Prop. V.

Quae quinta eſt Lib. 2. Apollonii.

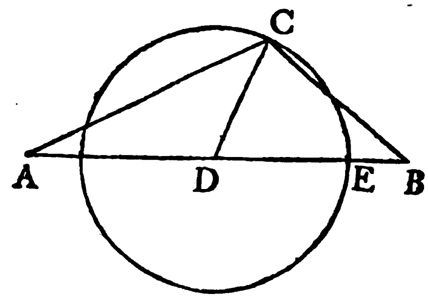
Si a quotcunque datis punctis inflectantur rectae ad unum punctum, fuerintque ſpecies [hoc eſt figurae ſpecie datae] ab omnibus deſcriptae, ſimul aequales ſpatio dato; tanget punctum circumferentiam poſitione datam.

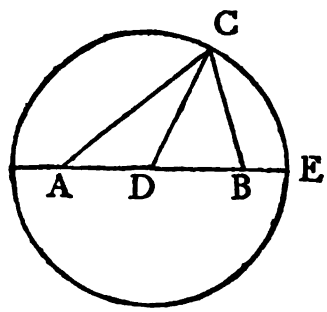
Cas.

CAS. 1. Quando data ſunt duo puncta.

Primo, ſint figurae, ſuper inflexas deſcriptae, quadrata.

A duobus punctis datis A, B, inflectantur ad punctum C, rectae AC, BC; ſintque quadrata ab ipſis deſcripta ſimul aequalia ſpatio dato: tanget punctum C circumferentiam poſitione datam.





Jungatur enim AB, biſariamque ſecetur in D; ergo datum eſt punctum D; et junctâ DC, erunt quadrata ex AC,BC ſimul aequalia [per Lemm. 6.] duplo quadratorum ex CD, DA; et data ſunt quadrata ex AC, BC ſimul, quare quadrata ex AD, DC ſimul data ſunt; data autem eſt AD, et quadratum ex ipsâ; ergo datum eſt reliquum quadratum ex DC, et ipsâ DC magnitudine dabitur, datumque eſt punctum D, quare tangit C circumferentiam poſitione datam per Prop. 1. Lib. 1. hujus.

Componetur vero ita.

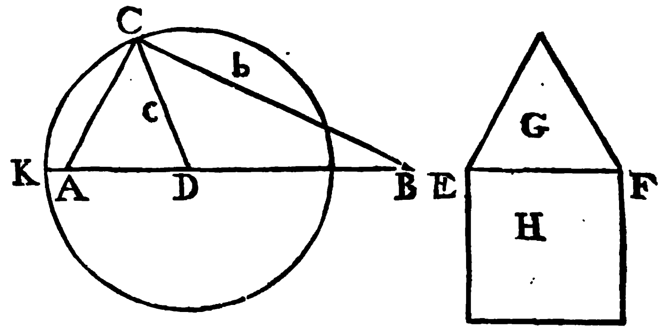
Quoniam duplum quadratum ex AD, hoc eſt, rectangulum BAD auferendum eſt ex ſpatio dato, oportet ſpatium datum, majus eſſe rectangulo BAD. ſit igitur ſpatium datum aequale rectangulo BAD et duplo quadrato ex DE ſimul; centroque D, intervallo DE, deſcribatur circulus: erit hujus circumferentia Locus quaeſitus, hoc eſt, ſi ad quodvis in ipſa punctum C, inflectantur a punctis A, B, rectae AC, BC, erunt quadrata ex ipſis ſimul aequalia duplo quadratorum ex AD, DE, hoc eſt, ſpatio dato; quod quidem, junctâ DC, manifeſtum eſt ex Lemmate 6. De punctis vero E, in quibus Locus occurrit rectae AB patet per 9. aut 10. 2di. ſunt enim quadrata ex AE, EB dupla quadratorum ex AD, DE.

Secundo,

Digitized by Google

Secundo, Quando figura, ſuper unam ex ductis deſcripta, eſt quadratum; non autem altera.

A datis punctis A, B, inflectantur AC, BC, ſitque quadratum ex AC, una cum figura ſpecie data, ſuper BC deſcripta aequale ſpatio dato: tanget punctum C circumferentiam poſitione datam. Jungatur enim AB, et figura ſuper BC deſcripta dicatur b, et,



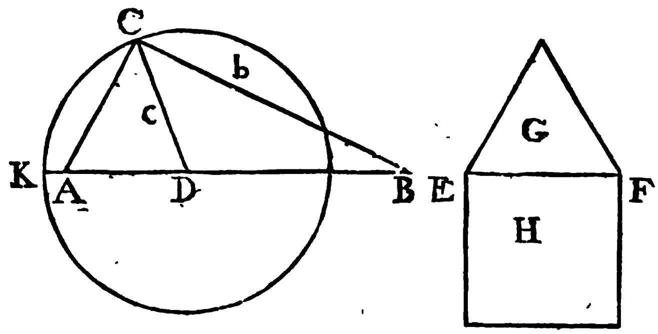
quoniam ſpecie data eſt, dabitur ipſius ratio [49. dat.] ad quadratum ex BC. ſecetur AB in D, ita ut AD ſit ad DB, ut figura b ad quadratum ex BC; et, per caſum ultimum Lemm. 10. erit quadratum ex AC una cum b aequale rectangulo BAD, et ei figurae quod ad quadratum ex DC eandem rationem habet quam AB ad BD, hoc eſt datam. dicatur haec c. et quoniam, ex hypotheſi, datum eſt quadratum ex AC una cum ipsâ b, dabitur rectangulum BAD una cum figura c. et datum eſt rectangulum BAD, ergo data eſt figura c; et data eſt ejus ratio ad quadratum ex DC, quod propterea datum erit, ipſaque DC magnitudine dabitur; et datum eſt punctum D; ergo tangit punctum C circumferentiam poſitione datam, per Prop. 1. Lib. 1. hujus.

Componetur vero ita.

Exponatur quaevis recta EF, et ſuper ipſam deſcribatur figura G, cui ſimilis eſſe debet figura ſuper BC; et ſit EF latus ipſius homologum lateri BC. et juncta AB ſecetur in D, ita ut AD ſit ad DB, ut G ad quadratum ex EF. et ſuper EF deſcribatur quadratum H. Quoniam igitur eſt G ad H, ut AD ad DB, erit componendo G et H ſimul ad H, ut AB ad BD. Datum autem ſpatium, cui quadratum ex AC una cum figura ſuper BC debet eſſe aequale, ſit M, quod,

Digitized by Google

ut ex analyſi conſtat, majus debet eſſe rectangulo BAD. Sit igitur M aequale rectangulo BAD et ſpatio N ſimul, et, per 25. 6. inveniatur figura c aequalis ſpatio N, ſimilis autem figurae quae ex ipſis G, H, compoſita eſt. et in recta DA ponatur a puncto D, recta DK aequalis lateri figurae c, quod ipſi EF homologum eſt;



centroque D, intervallo DK, deſcribatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaeſitus; hoc eſt, ſi ad quodvis in ipſa punctum C, inflectantur AC, BC, erit quadratum ex AC, una cum figura b ſuper BC quae ſimilis eſt ipſi G, aequale ſpatio dato M. Jungatur enim DC, et quoniam figura c ſuper DK ſeu DC ſimilis eſt ei quae compoſita eſt ex ipſis G, H, et ſunt DC, EF, latera ipſarum homologa, erit c ad quadratum ex DC, ut (G et H ſimul ad H quadratum ſc. ex EF, hoc eſt, ut) AB ad BD. et quoniam figurae b, G ſunt ſimiles, erit b ad quadratum ex BC, ut (G ad quadratum ex EF, hoc eſt, ut) AD ad DB. ergo per caſum ultimum Lemm. 10. erit quadratum ex AC una cum b aequale rectangulo BAD una cum c (ſeu N) hoc eſt dato ſpatio M.

Propoſitio in articulo hoc ſecundo, eadem eſt cum Propoſitione A Libri hujus ſecundi. Datum enim eſt quadratum ex AC, una cum figura ſpecie data ſuper BC, hoc eſt, una cum eo ſpatio quod ad quadratum ex BC datam habet rationem. hic autem repetita eſt tanquam caſus Propoſitionis hujus 5. ſimilemque cum reliquis caſibus demonſtrationem habens.

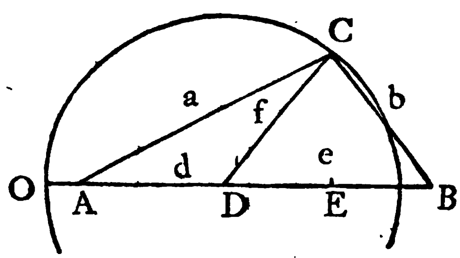
Tertio, Quando neutra ex figuris eſt quadratum.

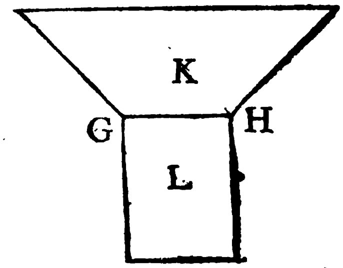
Sint duo puncta data A, B; et inflexis ad punctum C rectis AC, BC, ſint figurae ſpecie datae ſuper ipſas deſcriptae, ſimul aequales ſpatio dato. tanget punctum C circumferentiam poſitione datam.

Sit

Digitized by Google

Sit figura ſuper AC deſcripta a, quae vero ſuper BC deſcripta eſt, ſit b; dabitur igitur [49. dat.] ratio ipſius a ad quadratum ex AC,



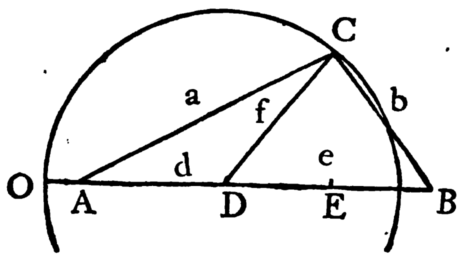


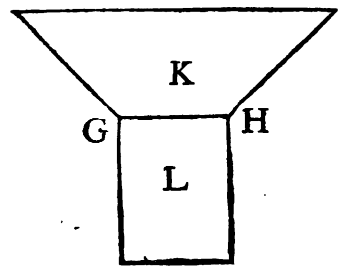
ut et ratio figurae b ad quadratum ex BC. et quoniam datae ſunt hae duae rationes, et data eſt juncta AB poſitione et magnitudine; dabitur, per Lem. 9. punctum in AB ipſam in duo ſegmenta dividens quae ad datam rectam, datas has habebunt rationes. ſit punctum illud D, et data recta DE, ut ſc. BD ſit ad DE, ut figura a ad quadratum ex AC; AD vero ſit ad DE, ut figura b ad quadratum ex BC. Junctâ vero DC, ſuper AD deſcripta ſit figura d ſimilis ipſi a, et ſuper DB figurae ſimilis ipſi b. Erit igitur d ad quadratum ex AD, ut a ad quadratum ex AC, hoc eſt, ut BD ad DE; ſimiliter erit e ad quadratum ex DB, ut AD ad DE. et per Lemm. 10. erunt figurae a, b, ſimul aequales ipſis d, e una cum eo quod ad quadratum ex DC eſt ut AB ad DE. Sitque hoc ſpatium figura f. ex hypotheſi vero figurae a, b ſimul datae ſunt, quare figurae d, e, f ſimul dabuntur. et datae ſunt d, e, quae ad quadrata ex datis AD, BD datas habent rationes; dabitur igitur figura f. habet autem f ad quadratum ex DC datam rationem, quare datum eſt quadratum ex DC, et ipſa DC magnitudine dabitur. datumque eſt punctum D, ergo tangit punctum C circumferentiam poſitione datam per Prop. 1. Lib. 1. hujus.

Componetur vero ita.

Super eandem rectam GH ſint duae figurae K, L, quarum K ſit ea cui figura ſuper AC ſimilis eſſe debet, L vero cui figura ſuper

BC ſimilis deſcribenda eſt; ſit vero in utraque K, L, latus GH ipſis AC, BC homologum. et per Lemm. 9. ſecetur recta AB in D, et inveniatur





DE, ita ut BD ſit ad DE, ut figura K ad quadratum ex GH; AD vero ſit ad DE, ut figura L ad quadratum ex eadem GH; et per 24. 5. figura ex K, L compoſita erit ad quadratum ex GH, ut AB, ad DE. Super AD vero deſcripta ſit figura d ſimilis ipſi K, et ſuper DB, figura e ſimilis ipſi L. datum autem ſpatium cui figurae ſuper AC, BC ſimul aequales eſſe debent, ſit M, quod, ut ex analyſi conſtat, majus debet eſſe ipſis d, e ſimul. ſit igitur M aequalis ipſis d, e et ſpatio N ſimul; et per 25. 6. inveniatur figura f aequalis ipſi N, ſimilis vero ei quae ex ipſis K, L compoſita eſt; et ſit DO aequalis lateri ipſius quod ipſi GH homologum eſt. Centroque D, intervallo DO, circulus deſcribatur; erit hujus circumferentia Locus quaeſitus. hoc eſt, ſi ad quodvis in ipſa punctum C inflectantur AC, BC, erit figura a ſuper AC quae ſimilis eſt ipſi K una cum figura b ſuper BC quae ſimilis eſt ipſi L, aequalis ſpatio dato M. Jungatur enim DC, et quoniam figura f ſuper DO ſeu DC, ſimilis eſt ei quae ex K, L compoſita eſt, erit f ad quadratum ex DC, ut (K et L ſimul ad quadratum ex GH, hoc eſt, ut) AB ad DE; quare per Lemm. 10. figurae a, b ſimul aequales ſunt ipſis d, e, f, hoc eſt, ipſis d, e, N hoc eſt, ex conſtructione, ſpatio dato M.

Si autem figurae a, b, ſint ſimiles, hoc eſt, ſi fuerit a ad quadratum ex AC, ut b ad quadratum ex BC, Locus deducetur ad eum in quo figurae ſpecie datae ſunt quadrata. erunt enim [12. 5.] a et b ſimul ad quadrata

Digitized by Google

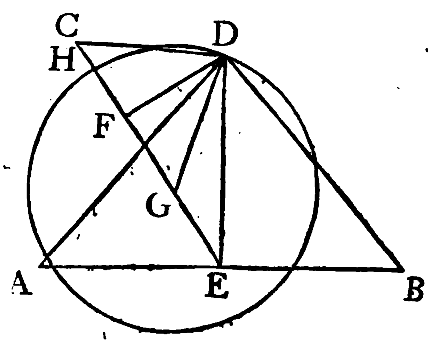
quadrata ex AC, BC ſimul, ut a ad quadratum ex AC, hoc eſt in ratione data; et, ex hypotheſi, a et b ſimul dato ſpatio ſunt aequales, quare quadrata ex AC, BC, ſimul data erunt. ergo per primum articulum hujus Caſus 1^{mi}, tanget punctum C circumferentiam poſitione datam. Spatium autem cui aequalis eſt ſumma quadratorum ex AC, BC, invenietur faciendo ſpatium datum M ad aliud N, in data ratione quam habere debet a ad quadratum ex AC; erit enim N aequale ſummae quadratorum ex AC, BC, ut patet.

CAS. 2. Quando data ſunt tria puncta.

Primo, Quando figurae, ſuper inflexas, ſunt quadrata.

Data ſint tria puncta A, B, C, et ad punctum D inflectantur rectae AD, BD, CD; ſintque quadrata ex omnibus, ſimul aequalia ſpatio dato: tanget punctum D circumferentiam poſitione datam.

Ducatur enim DE bifariam ſecans junctam AB, ergo per Lemm. 6. quadrata ex AD, BD ſimul aequalia ſunt rectangulo BAE et duplo quadrato ex ED; tria igitur quadrata ex AD, BD, CD aequalia ſunt rectangulo BAE, duplo quadrato ex ED, et quadrato ex CD ſimul; hoc eſt, ductâ DF perpendiculari ad junctam EC, tria praedicta quadrata ſimul aequalia ſunt rectangulo BAE, quadrato ex CF, duplo quadrati ex FE et triplo quadrati ex DF.

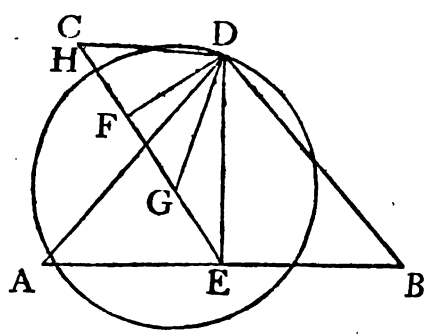


Quoniam vero data eſt ratio dupli quadrati ex FE ad ipſum quadratum ex FE, dabitur per Lemm. 8. punctum in EC, ſc. punctum dividens ipſam in G, ita ut CG ſit dupla ipſius GE, quod faciet quadratum ex CF ſimul cum duplo quadrati ex FE aequale dato ſpatio, rectangulo ſc. ECG, una cum eo quod ad quadratum ex GF rationem habet eandem quam CE ad EG, hoc eſt aequale rectangulo ECG, una cum triplo quadrati ex GF. fiat igitur CG dupla ipſius GE, et tria quadrata ex AD, BD, CD, ſimul aequalia erunt datis rectangulis BAE, ECG, et triplo

plo (quadratorum ex GF, FD, hoc eſt) quadrati ex GD. Quare rectangula BAE, ECG, triplumque quadrati ex GD ſimul dantur; et data ſunt BAE, ECG; quare datur triplum quadrati ex GD; datum igitur eſt ipſum quadratum ex GD, et recta GD, datum autem eſt punctum G; ergo tangit punctum D circumferentiam poſitione datam.

Componetur vero ita.

Jungantur quaevis duo ex punctis datis rectâ AB, bifariamque ſectâ AB in E, jungatur EC, quae dividatur in G ita ut CG dupla ſit ipſius GE. et quoniam requiritur ut rectangula BAE, ECG auferantur ex ſpatio dato; oportet ſpatium hoc ipſis ſimul majus eſſe; ſit igitur ſpatium datum aequale ipſis BAE, ECG rectangulis una cum triplo quadrato ex recta GH; et centro G, intervallo GH, deſcribatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaeſitus. hoc eſt, ſi a punctis datis A, B, C inflectantur ad quodvis in ipſa punctum D, rectae AD, BD, CD, erunt tria quae fiunt ex ipſis quadrata ſimul aequalia ſpatio dato, hoc eſt, rectangulis BAE, ECG et triplo quadrato ex GH. Jungantur enim ED, DG, et ducatur DF perpendicularis ad EH. Quoniam igitur bifariam ſecta eſt AB in E, erunt, per Lemma 6tum, quadrata ex BD, AD ſimul aequalia rectangulo BAE et quadrato ex ED bis, hoc eſt, ipſi BAE, et quadratis ex FE, FD bis ſumptis; addatur utrinque quadratum ex CD, ſeu quadrata ex CF, FD; et tria quadrata ex CD, BD, AD ſimul aequalia erunt rectangulo BAE, quadrato ex CF, quadrato ex FE bis, et quadrato ex FD ter; et horum per Lemma 7. (quoniam ſc. CG facta eſt dupla ipſius GE) quadratum ex CF una cum quadrato ex FE bis aequale eſt rectangulo ECG et quadrato ex GF ter. ergo tria quadrata ex CD, BD, AD, ſimul aequalia ſunt rectangulis BAE, ECG, et (quadratis ex GF, FD ter

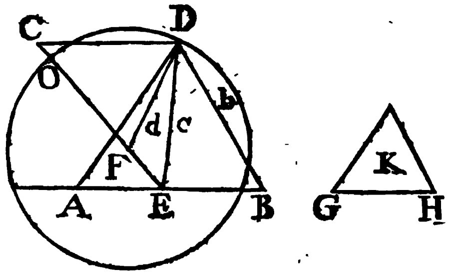


Digitized by Google

ter ſumptis, hoc eſt) quadrato ex GD, ſeu GH ter, hoc eſt, ex conſtructione, ſpatio dato.

Secundo, Sint duae ex figuris quadrata, reliqua autem non ſit quadratum.

Datis tribus punctis A, B, C, inflectantur AD, BD, CD, et ſit quadratum ex AD, figura ſpecie data ſuper BD deſcripta, et quadratum ex CD, ſimul, aequalia ſpatio dato: tanget punctum D circumferentiam poſitione datam.

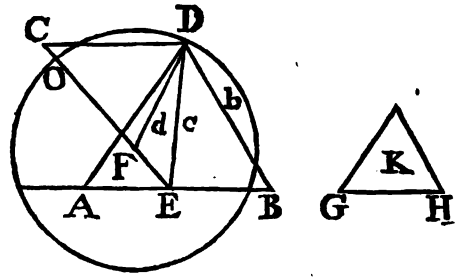


Jungatur AB, et figura ſuper BD dicatur b; et quoniam haec ſpecie data eſt, dabitur ejuſdem ratio [49. dat.] ad quadratum ex BD. Secetur AB in E, ita ut AE ſit ad EB, ut figura b ad quadratum ex BD, et jungatur ED. Igitur, per Caſum ultimum Lemm. 10. quadratum ex AD una cum figura b, aequale eſt rectangulo BAE, et figurae quae ad quadratum ex ED, eſt ut AB ad BE, hoc eſt in ratione data. Sit haec figura c, additoque communi quadrato ex CD, erit quadratum ex AD, figura b, et quadratum ex CD ſimul, aequalia rectangulo BAE, figurae c, et quadrato ex CD. Jungatur EC, et ſecetur in F, ita ut CF ſit ad FE, ut figura c ad quadratum ex ED; hoc eſt, ut AB ad BE, et jungatur FD. Rurſus igitur, per Caſum ultimum Lemm. 10. erit quadratum ex CD, una cum figura c, aequale rectangulo ECF, una cum ea figura d, quae eſt ad quadratum ex FD, ut CE ad EF. ergo quadratum ex AD, figura b, et quadratum ex CD ſimul, aequalia ſunt rectangulis BAE, ECF una cum figura d. et data ſunt tria priora ſpatia, quare et tria reliqua data erunt. data autem ſunt rectangula BAE, ECF, quare data eſt figura d. eſt autem d ad quadratum ex FD, ut CE ad EF, hoc eſt in ratione data. ergo datum eſt quadratum ex FD, et ipſa FD magnitudine. datumque eſt punctum F. ergo tangit punctum D circumferentiam poſitione datam.

Componetur

Componetur vero ita.

Super rectam quamvis GH, deſcribatur figura K, cui ſimilis eſſe debet figura ſuper BD. ſitque GH latus ejus homologum lateri BD; et ſecetur juncta AB in E, ita ut AE ſit ad EB, ut K ad quadratum ex GH. Jungatur EC, et ſecetur in F, ita ut CF ſit ad FE, ut AB ad BE. ſitque M ſpatium, cui quadratum ex AD, figura ſuper BD ſimilis ipſi K, et quadratum ex CD ſimul, aequalia debent eſſe. debet igitur M majus eſſe rectangulis BAE, ECF, ut ex analyſi conſtat. ſit M aequale ipſis BAE, ECF rectangulis, et inſuper figurae d. et ut CE ad EF, ita ſit d ad quadratum ex recta FO quae ponatur a puncto F; centroque F, intervallo FO, deſcribatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaeſitus. hoc eſt, ſi ad quodvis in ipſa punctum D, ducantur AD, BD, CD, et ſuper BD deſcribatur figura b, ſimilis ipſi K; erit quadratum ex AD, figura b, et quadratum ex CD ſimul, aequale ſpatio dato M. Jungatur enim ED et FD; et ſit c figura quae ad quadratum ex ED, eſt ut CF ad FE, hoc eſt, ut AB ad BE. et quoniam a vertice D trianguli CED, ducta eſt DF ad baſim; et eſt d ad quadratum ex FO ſeu FD, ut CE ad EF, erit per Caſum ultimum Lemm. 10. quadratum ex CD una cum figura c aequale rectangulo ECF, et figurae d. et quoniam b ſimilis eſt ipſi K, erit b ad quadratum ex BD, ut (K ad quadratum ex GH, hoc eſt, ut) AE ad EB. eſt autem c ad quadratum ex ED, ut AB ad BE, igitur, quoniam a vertice D trianguli ABD, ducta eſt DE ad baſim, erit quadratum ex AD, et figura b ſimul, aequalia rectangulo BAE, et figurae c. additoque quadrato ex CD, erit quadratum ex AD, figura b, et quadratum ex CD, aequalia rectangulo BAE, figurae c, et quadrato ex CD, hoc eſt, ex praemiſſis, rectangulis BAE, ECF et figurae d, hoc eſt ſpatio dato M.

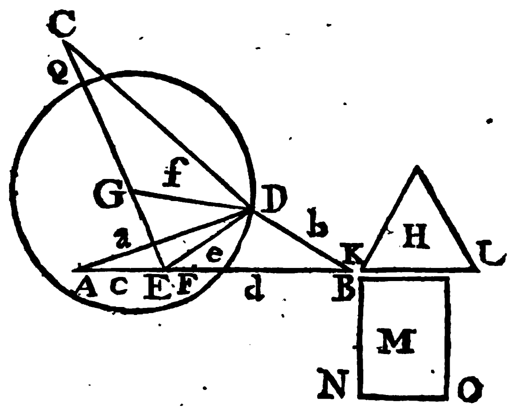


Tertio,

Digitized by Google

Tertio, Datis tribus punctis A, B, C, inflectantur AD, BD, CD, et ſit figura ſpecie data ſuper AD, una cum figura ſpecie data ſuper BD, et quadrato ex CD, aequalis ſpatio dato: tanget punctum D circumferentiam poſitione datam.

Jungatur AB, et figura ſuper AD dicatur a, et ea ſuper BD, b. Dabitur igitur ratio [49. dat.] a ad quadratum ex AD, et ratio b ad quadratum ex BD. Inveniri igitur poterint, per Lemm. 9. punctum E in recta AB, et recta EF, ita ut BE ſit ad EF, ut a ad quadratum ex AD; et AE ſit ad EF, ut b ad quadratum ex BD. Inveniantur, et jungatur ED; ſitque figura c ea quae ad quadratum ex AE, eſt ut BE ad EF, d ea quae ad quadratum ex BE, eſt ut AE ad EF, et e ſit figura quae ad quadratum ex ED, eſt ut AB ad EF. Eſt igitur [Lem. 10.] a una cum b aequale figuris c, d, e, ſimul. quare a, b una cum quadrato ex CD aequales ſunt ipſis c, d, e, una cum ex CD quadrato. Jungatur EC, et ſecetur in G, ita ut CG ſit ad GE, ut (AB ad EF, hoc eſt, ut) figura e ad quadratum ex ED, et GD jungatur; ſitque figura f ea quae ad quadratum ex GD, eſt ut CE ad EG. Igitur, per Caſum ultimum Lemm. 10. quadratum ex CD, una cum figura e, aequale eſt rectangulo ECG et figurae f ſimul. figurae autem a, b una cum quadrato ex CD, aequales oſtenſae ſunt ipſis c, d, e, una cum eodem ex CD quadrato, ergo a, b, una cum quadrato ex CD, aequales ſunt ipſis c, d, rectangulo ECG, et figurae f. et figurae a, b, una cum quadrato ex CD, aequales ſunt, ex hypotheſi, ſpatio dato, quare et c, d, rectangulum ECG, et figura f ſimul, aequalia ſunt ſpatio dato. et datae ſunt c, d, figurae, datumque eſt ECG rectangulum; data igitur eſt figura f; habet autem f ad quadratum ex GD datam rationem, quam ſc. habet CE ad EG; datum igitur eſt hoc quadratum, ipſa-

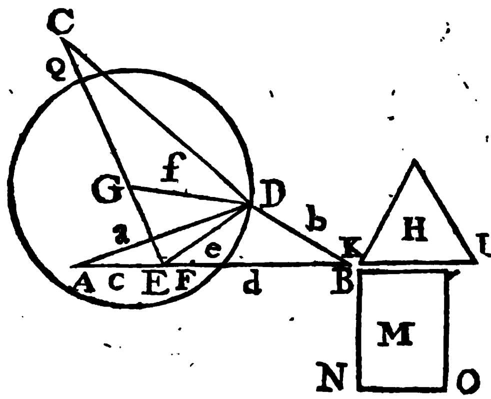


 que

que GD magnitudine data erit. datumque eſt punctum G; ergo tangit punctum D circumferentiam poſitione datam per Prop. 1. Lib. 1. hujus.

Componetur ita.

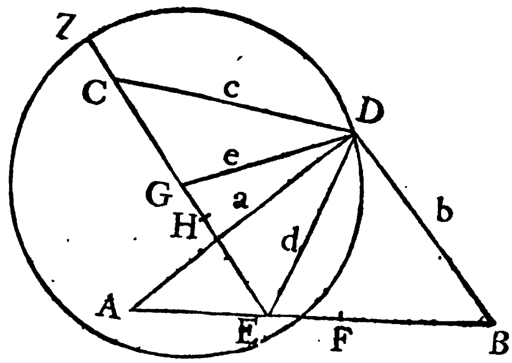
Sit H figura cui ſimilis debet eſſe ea quae ſuper AD deſcribenda eſt, et KL latus ejus homologum ipſi AD; ſitque M figura cui ſimilis eſſe debet figura ſuper BD, et NO latus ejuſdem homologum ipſi BD. et ſecetur AB in E, et inveniatur recta EF, ita ut figura H ſit ad quadratum ex KL, ut BE ad EF; M vero ſit ad quadratum ex NO, ut AE ad EF. Jungatur EC, et ſecetur in G, ita ut ſit CG ſit ad GE, ut AB ad EF. ſit autem P ſpatium datum cui aequalis debet eſſe ſumma figurarum ſuper AD, BD, una cum quadrato ex CD. ſit autem c figura quae ad quadratum ex AE, eſt ut BE ad EF, et d ea quae ad quadratum ex BE, eſt ut AE ad EF. debet igitur ſpatium P majus eſſe ipſis c, d et rectangulo ECG ſimul; ſit P aequale ipſis c, d, rectangulo ECG, et figurae f; et ut CE ad EG, ita fiat f ad quadratum ex recta GQ, quae ponatur a puncto G, et centro G, intervallo GQ, deſcribatur circulus, erit hujus circumferentia Locus quaeſitus. hoc eſt, ſi ad quodvis in ipſa punctum D, ducantur AD, BD, CD, erit figura a ſuper AD ſimilis ipſi H, una cum figura b ſuper BD ſimilis ipſi M, et quadrato ex CD, aequalis ſpatio dato P. Jungantur enim ED, GD, ſitque e figura quae ad quadratum ex ED, eſt ut CG ad GE, hoc eſt, ut AB ad EF. Et quoniam a vertice trianguli CED, ducta eſt DG ad baſim, et eſt f ad quadratum ex GQ ſeu GD, ut CE ad EG, erit, per ultimum caſum Lemm. 10. quadratum ex CD una cum e, aequale rectangulo ECG una cum f. et quoniam a vertice D trianguli ABD ducta eſt DE ad baſim, et eſt a ad qua-



quadratum ex AD, ut BE ad EF; b ad quadratum ex BD, ut AE ad EF; c ad quadratum ex AE, ut BE ad EF; d ad quadratum ex BE, ut AE ad EF, et e ad quadratum ex ED, ut AB ad EF; erit, per Lemm. 10. a et b ſimul aequales ipſis c, d, e. ergo a, b una cum quadrato ex CD ſimul, aequales ſunt ipſis c, d, e, et quadrato ex CD; hoc eſt, ex praemiſſis, ipſis c, d, rectangulo ECG, et ipſi f, hoc eſt, ex conſtructione, ſpatio dato P.

Quarto, Data ſint tria puncta A, B, C, et ab ipſis ad punctum D inflectantur rectae AD, BD, CD, ſintque figurae ſpecie datae ſuper ipſas deſcriptae ſimul aequales ſpatio dato. tanget punctum D circumferentiam poſitione datam.

Sit a figura ſuper AD, b figura ſuper BD, et c ea quae ſuper CD deſcripta eſt. et quoniam figurae a, b ad quadrata ex ipſis AD, BD datas habent rationes, poterit, per Lemm. 9. inveniri in AB punctum E, et recta EF, ita ut a ſit ad quadratum ex AD, ut BE ad EF, b vero ſit ad quadratum ex BD, ut AE ad EF. Inveniantur, et per Cor. Lemm. 10. erunt figurae a, b ſimul aequales ſpatio dato, (quod dicatur T) una cum eo quod eſt ad quadratum ex DE, ut AB ad EF, quod ſit figura d. tres igitur figurae a, b, c ſimul



aequales ſunt ſpatio T et figuris d, c. datae autem ſunt rationes quam d, c habent ad quadrata ex ED, CD, rurſus igitur per Lemm. 9. inveniatur punctum G in ipſa CE, et recta GH, ita ut figura c ſit ad quadratum ex CD, ut GE ad GH, et figura d ſit ad quadratum ex ED (hoc eſt AB ſit ad EF) ut CG ad GH. et per Cor. Lem. 10. figurae c, d, ſimul aequales erunt dato ſpatio, (quod dicatur V) et ei quod ad quadratum ex juncta GD, datam habet rationem CE ad GH, quod ſit figura e. tres igitur figurae a, b, c (ſeu ſpatium T una cum figuris c, d) ſimul aequales ſunt ſpatiis T, V, et figurae e; quae

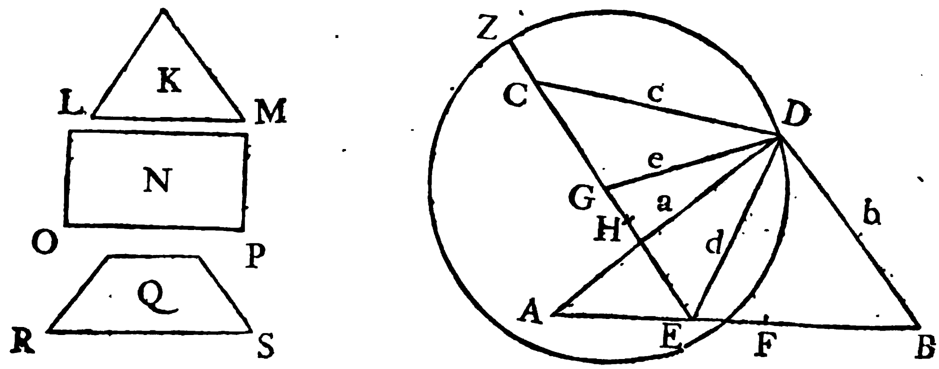
 propterea

Digitized by Google

propterea ſimul datae ſunt. et data ſunt T, V, ſpatia, quare data eſt figura e. quadratum igitur ex GD ad quod e habet datam rationem, datum eſt, et ipſa GD magnitudine dabitur. et datum eſt punctum G, ergo punctum D tangit circumferentiam poſitione datam.

Componetur vero ita.

Sit K figura cui ſimilis debet eſſe figura ſuper AD, ſitque ipſius latus LM illud cui homologum debet eſſe AD, N vero ſit ea cui ſimilis debet eſſe figura ſuper BD, et OP latus cui homologum debet eſ-



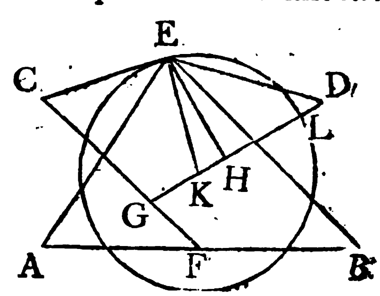
ſe BD, et ſit Q ea cui ſimilis debet eſſe figura ſuper CD, et RS latus cui homologum debet eſſe CD. ſecetur autem AB in E et inveniatur recta EF, ita ut figura K ſit ad quadratum ex LM, ut BE ad EF; N vero ſit ad quadratum ex OP, ut AE ad EF. Juncta vero CE dividatur in G, et inveniatur recta GH, ita ut figura Q ſit ad quadratum ex RS, ut EG ad GH, AB vero ſit ad EF, ut CG ad GH. ſit autem ſpatium quod eſt ad quadratum ex AE ut BE ad EF, una cum eo quod eſt ad quadratum ex EB, ut AE ad EF aequale ſpatio T. ſpatium autem quod eſt ad quadratum ex CG ut EG ad GH, una cum eo quod eſt ad quadratum ex GE, ut CG ad GH aequale ſit ſpatio V. ſitque X ſpatium datum cui aequalis debet eſſe ſumma figurarum ſuper ipſas AD, BD, CD, quod propterea majus debet eſſe ſpatiis T, V ſimul. ſit igitur X aequale ipſis T, V, Y ſimul, ſitque GZ recta

Digitized by Google

recta ad cujus quadratum ſpatium Y eſt ut CE ad GH; et centro G intervallo GZ, deſcribatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaeſitus. ad quodvis enim in ipſa punctum D ducantur AD, BD, CD, et ſuper ipſas deſcribantur figurae a, b, c ſimiles ipſis K, N, Q; ſintque AD, BD, CD ipſorum latera quae homologa ſunt ipſis LM, OP, RS; erunt a, b, c ſimul aequales ſpatio X. Jungantur enim ED, GD, et quoniam ſimiles ſunt figurae a, K, erit a ad quadratum ex AD, ut (K ad quadratum ex LM, hoc eſt, ex conſtructione, ut) BE ad EF, ſimiliter erit figura b ad quadratum ex BD, ut AE ad EF. ſit autem d illud quod ad quadratum ex ED, eſt ut AB ad EF. igitur per Lemm. 10. figurae a, b, ſimul aequales ſunt ipſis T, d. Rurſus, quoniam ſimiles ſunt figurae c, Q, erit c ad quadratum ex CD, ut (Q ad quadratum ex RS, hoc eſt, ut) EG ad GH; d vero eſt ad quadratum ex ED, ut (AB ad EF, hoc eſt, ut) CG ad GH. ergo, per Lemm. 10. figurae c, d ſimul aequales ſunt ſpatio V, et (ei quod eſt ad quadratum ex GD, ſeu GZ, ut CE ad GH, hoc eſt) ſpatio Y. additoque communi ſpatio T, erunt c, d, T ſimul aequalia ipſis T, V, Y. a vero et b ſimul aequales ſunt ipſis T, d. ergo figurae a, b, c ſimul aequales ſunt ſpatiis T, V, Y, hoc eſt ſpatio dato X.

Cas. 3. Quando data ſunt quatuor puncta.

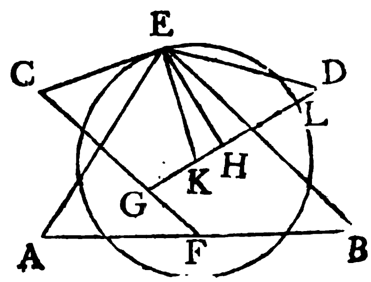
Data ſint quatuor puncta A, B, C, D, et ad punctum E inflectantur AE, BE, CE, DE, ſintque quadrata ex omnibus ſimul aequalia ſpatio dato: tanget punctum E circumferentiam poſitione datam.



Jungatur enim AB, et ducatur EF ipſam biſariam ſecans in F; junctaque FC, ducatur EG ſecans ipſam in G, ita ut CG dupla ſit ipſius GF; et ut oſtenſum fuit in caſu trium punctorum, quadrata ex AE, BE, CE ſimul aequalia erunt datis rectangulis BAF, FCG, et triplo quadrati ex GE; ergo ducta EH perpendiculari ad GD, quatuor quadrata ex AE, BE, CE,

CE, DE ſimul aequalia erunt rectangulis BAF, FCG, quadrato ex DH, triplo quadrati ex HG et quadruplo quadrati ex HE. Quoniam igitur datur ratio quadrati ex HG ter ſumpti ad ipſum quadratum ex HG, ſi dividatur DG in K, ita ut DK tripla ſit ipſius KG; erit, per

Suppleantur rectae GE, FE.



Lemm. 7. quadratum ex DH ſimul cum quadrato ex HG ter, aequale dato rectangulo GDK una cum eo quod ad quadratum ex KH eandem habet rationem quam DG ad GK, hoc eſt aequale rectangulo GDK una cum quadrato ex KH quater; ergo quatuor quadrata ex AE, BE, CE, DE, ſimul aequalia erunt datis rectangulis BAF, FCG, GDK, et (quadratis ex KH, HE quater, hoc eſt) quadrato ex KE quater. et, ex hypotheſi, quatuor illa quadrata ſimul dantur; quare tria rectangula una cum quadrato ex KE quater ſimul dantur; et data ſunt rectangula; quare quadratum ex KE quater, datum eſt; datumque propterea eſt quadratum ex KE, et recta KE; datum autem eſt punctum K, ergo tangit punctum E circumferentiam poſitione datam.

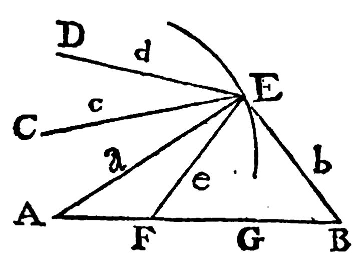
Componetur vero ita.

Jungantur quaevis duo ex punctis datis rectâ AB, et biſariam ſecta AB in F, jungatur F et quodvis ex reliquis punctis rectâ FC; ſectâ vero FC in G ita ut CG dupla ſit ipſius GF, jungatur G et reliquum punctum D rectâ GD quae ita ſecetur in K ut DK tripla ſit ipſius KG. neceſſe autem eſt, ut ex analyſi conſtat, ſpatium datum majus eſſe rectangulis BAF, FCG, GDK ſimul ſumptis; ſit igitur illud ſpatium aequale praedictis tribus rectangulis, et quadrato ex recta KL quater ſumpto; et centro K, intervallo KL, deſcribatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaeſitus, hoc eſt, ſi a quatuor datis punctis A, B, C, D ad punctum quodvis E in ipſa inflectantur rectae AE, BE, CE, DE; erunt quadrata ex ipſis ſimul ſumpta aequalia

lia ſpatio dato, hoc eſt, rectangulis BAF, FCG, GDK et quadrato ex KL quater. Jungantur enim EF, EG, EK, et ad GD ducatur perpendicularis EH; et quoniam bifariam ſecta eſt AB in F, CG autem dupla eſt ipſius GF; erunt, ut in compoſitione praecedentis oſtenſum, tria quadrata ex CE, BE, AE ſimul aequalia rectangulis BAF, FCG et quadrato ex GE ter, hoc eſt ipſis BAF, FCG et quadratis ex HG, HE ter ſumptis. addatur utrinque quadratum ex DE; ſeu quadrata ex DH, HE; eruntque quatuor quadrata ex DE, CE, BE, AE ſimul aequalia rectangulis BAF, FCG, quadrato ex DH, quadrato ex HG ter, et quadrato ex HE quater; quorum per Lem. 7. (quoniam ſc. DK facta fuit tripla ipſius KG) quadratum ex DH una cum quadrato ex HG ter, aequale eſt rectangulo GDK una cum quadrato ex HK quater. ergo quatuor quadrata ex DE, CE, BE, AE ſimul aequalia ſunt rectangulis BAF, FCG, GDK, una cum (quadratis ex HK, HE quater, hoc eſt) quadrato ex KE ſeu KL quater, hoc eſt) ex conſtructione, ſpatio dato.

Atque ita, creſcente numero punctorum, analyſis et compoſitio neceſſario longiores evadunt, ſi inſtituendae eſſent, nulla habita ratione praecedentium caſuum qui magis ſimplices ſunt. Utile igitur eſt, ut in pagina 89. obſervatum fuit, in Propoſitionibus in quibus numerus rerum datarum poterit ſine fine augeri, viam oſtendere, quâ Locus in dato numero punctorum propoſitus, ad Locum in quo numerus eorundem, iſto numero proxime minor ſit, deduci poterit; in analyſi ſc. ut compoſitio, ad numerum huic proxime majorem, progrediatur, ut in caſu ſequente fit, viz.

Datis quatuor punctis A, B, C, D, ſi ab ipſis inflectantur AE, BE, CE, DE ad unum punctum fueritque ſumma figurarum, ſuper ipſas, quae ſpecie datae ſunt, aequalis ſpatio dato: tanget punctum E circumferentiam poſitione datam.

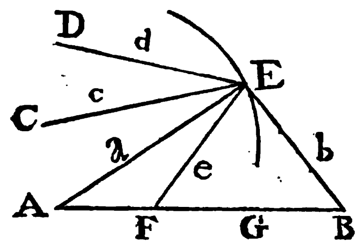


Dicatur enim figura ſuper AE, a; quae ſuper BE, b; ſuper CE, c; et ſuper DE, d. harum igitur, ad quadrata ex rectis, ſuper

quas

Digitized by Google

quas deſcriptae ſunt, rationes datae erunt [49. dat.]. Jungatur AB, et ſecetur in F, et inveniatur recta FG, [Lemm. 9], ita ut figura a ſit ad quadratum ex AE, ut BF ad FG; et figura b ſit ad quadratum ex BE, ut AF ad FG. ergo, per Cor. Lemm. 10. figurae a, b ſimul aequales ſunt ſpatio dato, quod dicatur H, et figurae quae ad quadratum ex juncta FE datam habet rationem, quam ſc. habet AB ad FG. dicatur autem haec figura e. ex hypotheſi vero, figurae a, b, c, d ſimul aequales ſunt ſpatio dato; quare ſpatium H una cum figuris e, c, d, eidem ſpatio dato eſt aequale. et datum eſt ſpatium H. ergo figurae e, c, d, ſimul datae ſunt. Quoniam igitur a datis tribus punctis F, C, D, inflexae ſunt ad punctum E, rectae FE, CE, DE, et ſumma figurarum ſpecie datarum quae ſuper ipſas deſcriptae ſunt, ipſarum ſc. e, c, d, data eſt; tanget punctum E circumferentiam poſitione datam, per Caſum praecedentem.



Componetur ita.

Sit ratio quam figura a habet ad quadratum ex AE eadem quam habet recta R ad ipſam T, quam vero habet figura b ad quadratum ex BE, ſit ea quam habet S ad eandem T. et per Lemm. 9. ſecetur AB in F, et inveniatur recta FG, ita ut BF ſit ad FG, ut R ad T; AF vero ſit ad FG, ut S ad T. ſit vero figura quae ad quadratum ex AF, eſt ut BF ad FG, una cum ea quae ad quadratum ex BF, eſt ut AF ad FG, aequalis ſpatio H. ſitque K ſpatium datum, cui aequalis debet eſſe ſumma figurarum ſpecie datarum ſuper ipſis AE, BE, CE, DE, ipſarum ſc. a, b, c, d; igitur debet K majus eſſe ipſo H. ſit K aequale H, L, ſpatiis. et per caſum 2. praecedentem deſcribatur circulus, ad cujus quodvis punctum E, ſi ducantur a datis punctis F, C, D, tres rectae, FE, CE, DE, figurae ſuper ipſas, quae datas habent rationes ad quadrata ex ipſis FE, CE, DE, ipſae ſc. e, c, d, (quarum ea e, quae ſuper FE deſcribenda eſt habet ad quadratum

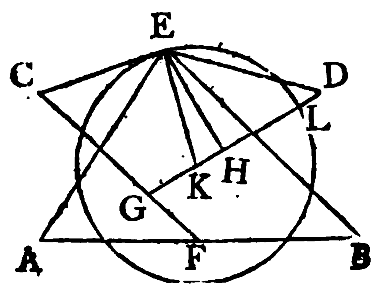
dratum ex FE datam rationem quam habet AB ad FG) ſimul aequales erunt ſpatio L. erit hujus circumferentia Locus quaeſitus. hoc eſt, ſi jungantur AE, BE, et ſuper ipſas ſint figurae a, b, quae ad quadrata ex AE, BE datas habent rationes R ad T, et S ad T; erunt figurae a, b, c, d, ſimul aequales ſpatio K. Quoniam enim a vertice E trianguli ABE, ducta eſt EF ad baſim, et eſt a ad quadratum ex AE, ut R ad T, hoc eſt, ut BF ad FG; b ad quadratum ex BE, ut S ad T, hoc eſt, ut AF ad FG; figura vero quae ad quadratum ex AF, eſt ut BF ad FG, una cum ea quae eſt ad quadratum ex BF, ut AF ad FG ſimul aequales ſunt ſpatio H; et figura, e, ſuper FE eſt ad quadratum ex FE, ut AB ad FG; erit per Lemm. 10. a una cum b aequalis ſpatio H et figurae e: ex conſtructione autem, figurae e, c, d ſimul aequales ſunt ſpatio L. ergo ſpatium H una cum figuris e, c, d; hoc eſt figurae a, b, c, d ſimul aequales ſunt ipſis H, L ſpatiis, hoc eſt ſpatio dato K.

Eodem prorſus modo, ſi data ſint quinque puncta, analyſis et compoſitio Loci fiet ope earum quae Loco ad quatuor puncta data inſerviebant, et ſolutio Loci ad ſex puncta fiet ope ejus ad quinque; et ſimiliter uniformi ſemper tenore, quotcunque data fuerint puncta.

Caſum hunc, in quo figurae ſpecie datae non ſunt quadrata, Fermatius Apollonium non vidiſſe videri affirmat. deceptus ſc. eo quod verbum *ſpecies* ubique *quadrata* interpretatur. ſpecies vero ſeu *τὸ εἶδος* ſignificat figuram quamcunque rectilineam, ut in Prop. 31. Lib. 6. Elem. Euclidis; apud Pappum vero in hac Propoſitione, et ſequente ſexta, ut et in ipſius ultima Lib. 1. de Locis Planis, idem ſignificat quod apud Euclidem, in Prop. 52, 53, 54. Datorum, vocatur *τὸ εἶδος εἴδει δεδομένον*; quodque a Pappo ſecundum ipſius contractum dicendi modum, ſimpliciter *τὸ εἶδος* dicitur.

Locum hunc celeberrimum inter pulcherrimas Geometriae propoſitiones merito exiſtimat Cl. Fermatius in epiſt. ad Robervallium pag. 151. Var. Oper. Math. Cum vero varias ipſius ſolutiones tentabam, praecedens Lemma 7. ex quo locum hunc facile deductum iri videbam, inveſtigavi; poſtea autem ipſiſſimum hoc Lemma apud Pap-

pum Alexandrinum inveniens, magnopere laetabar, utpote jam certo ſciens ipſius Apollonii hujus Loci ſolutionem ope Lemmatis iſtius reſtitutam fuiſſe. Ex hac autem ſolutione liquido patet centrum circuli localis, quotcunque data fuerint puncta, centrum eſſe gravitatis omnium punctorum, hoc eſt magnitudinum aequalium ab ipſis ſuſpenſarum: quam proprietatem ſolummodo in caſu trium punctorum obſervavit Fermatius atque ipſam ſatis miram eſſe praedicat, in epiſt. praedicta. Simul etiam in hac ſolutione continetur demonſtratio Prop. 12. Horologii Oſcillatorii Illuſtriſſimi Hugenii. Propoſitio autem haec eſt, " Datis in plano punctis quotlibet, ſi ex centro gravitatis eorum " circulus quilibet deſcribatur; ducantur autem ab omnibus datis " punctis, ad punctum aliquod in circuli illius circumferentia lineae " rectae; erit ſumma quadratorum ab omnibus ſemper eidem plano " aequalis." Sint, ex. gr. quatuor puncta data A, B, C, D, et juncta AB bifariam ſecetur in F, juncta FC ſecetur in G, ita ut CG dupla ſit ipſius GF, et juncta GD ſecetur in K, ita ut DK tripla ſit ipſius KG; erit igitur punctum K centrum gravitatis punctorum A, B, C, D, ut ex definitione iſtius centri manifeſtum eſt; jam centro K quovis intervallo deſcribatur circulus LE, et ad



punctum quodvis in circumferentia ejus ducantur rectae AE, BE, CE, DE; oſtenſum eſt in compoſitione praecedente ſummam quadratorum ex omnibus aequalem ſemper fore rectangulis BAF, FCG, GDK una cum quadrati ex ſemidiametro KE multiplo ſecundum numerum punctorum, hoc eſt, in praeſente caſu una cum ipſius quadruplo. Quod quidem Hugenius calculo Algebraico ſatis prolixo in loco citato oſtendit *; Fermatius vero et Hugenius in ipſorum ſolutionibus utuntur duabus rectis ſibi invicem ad rectos angulos, quarum ſitus minime ex datis punctis dependet, ſed ad libitum ducuntur, quae

* In linea 2da pag. 112. Hor. Oſcil. Hugenii ed. Pariſ. legendum eſt $\frac{mm+ll}{4}$ non $\frac{mm-ll}{4}$ ut inter errata male corrigitur error in textu typographicus.

res

res in cauſa fuiſſe videtur cur in ſolutionem Apollonianam non inciderunt.

Ad finem ejuſdem Propoſitionis 12. Hugenius haec addit; "Quod
" ſi puncta data diverſas gravitates habere ponantur, invicem commen-
" ſurabiles, ut ſi punctum A ponderet ut 2, B ut 3, C ut 4, D ut 7,
" eorumque reperto gravitatis centro, circulus rurſus deſcribatur, ad
" cujus circumferentiae punctum, a datis punctis rectae ducantur, ac
" ſingularum quadrata multiplicia ſumantur ſecundum numerum
" puncti ſui; ut quadratum AF duplum, BF triplum, CF quadru-
" plum, DF ſeptuplum; dico rurſus ſummam omnium aequalem fo-
" re ſpatio dato, ſemperque eidem, ubicunque in circumferentia punc-
" tum ſumptum fuerit. Patet enim hoc ex praecedenti demonſtrati-
" one, ſi imaginemur puncta ipſa multiplicia ſecundum numeros at-
" tributae cuique gravitatis; quaſi nempe in A duo puncta conjuncta
" ſint, in B tria, in C quatuor, in D ſeptem, atque illa omnia aequa-
" liter gravia."

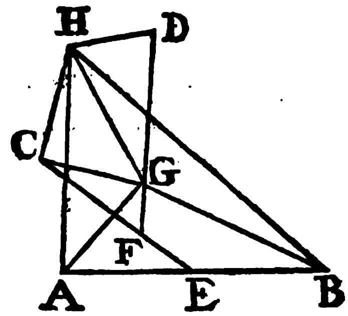
Verum conditio haec, quod pondera debent inter ſe commenſurabilia eſſe, minime neceſſaria eſt; ſi enim pondera ad unum aliquod pondus, datas habeant rationes, et ſumantur ſpatia quae ad quadrata ex ductis, a datis punctis ad punctum quodvis in circumferentia circuli deſcripti, datas has habeant rationes; erit ſumma omnium ſpatiorum, dato ſpatio aequalis; ut ex Corollario 3. ſequente manifeſtum erit.

Cor. I. Datis in plano punctis quotlibet, ſi ab ipſis et eorum centro gravitatis inflectantur rectae ad punctum quodlibet; erit ſumma quadratorum ex ductis aequalis dato ſpatio (ſummae ſc. quadratorum ex ductis, a datis punctis, ad eorum centrum gravitatis) ſimul cum multiplo quadrati ex ducta a centro gravitatis ad idem punctum, ſecundum numerum punctorum.

Sint enim, ex. gr. quatuor puncta A, B, C, D, et bifariam ſecta juncta AB in E, erit E centrum gravitatis punctorum A, B. junctâ autem EC, et ſectâ in F, ita ut CF dupla ſit ipſius FE, erit F centrum gra-

 vitatis

vitatis trium punctorum A, B, C. ſimiliter, juncta FD, et ſecta in G, ita ut DG tripla ſit ipſius GF, erit G centrum gravitatis quatuor punctorum A, B, C, D; et ita deinceps, ſi plura fuerint puncta. Ducantur autem AG, BG, CG, DG, et, ut in hac Propoſitione 5. oſtendetur ſumma quadratorum ex AG, BG, CG aequalis (duplo quadrati ex AE, uno cum duplo quadrati ex EF, et quadrato ex CF, et triplo quadrati ex FG; hoc eſt) rectangulo BAE, una cum rectangulo ECF, et triplo quadrati ex FG. Quare ſumma quadratorum ex AG, BG, CG, DG aequalis erit rectangulis BAE, ECF, triplo quadrati ex FG, et quadrato ex DG; hoc eſt, quia triplum quadrati ex FG aequale eſt rectangulo FGD, rectangulis BAE, ECF, FDG. Ducantur jam a datis punctis ad punctum quodlibet H, rectae AH, BH, CH, DH, et jungatur GH; erit, per hanc Propoſitionem, ſumma quadratorum ex AH, BH, CH, DH aequalis rectangulis BAE, ECF, FDG, et quadruplo quadrati ex GH, hoc eſt, ſummae quadratorum ex AG, BG, CG, DG, et quadruplo quadrati ex GH. et ſic ſi plura fuerint puncta.



Cor. II. Si in circulo inſcribatur quaevis figura aequilatera, et ab angulis figurae, et centro circuli inflectantur rectae ad punctum quodlibet; erit ſumma quadratorum ex ductis ab angulis figurae, aequalis multiplo ſummae quadratorum ex ea quae a centro ducta eſt, et ex ſemidiametro, ſecundum numerum laterum figurae inſcriptae.

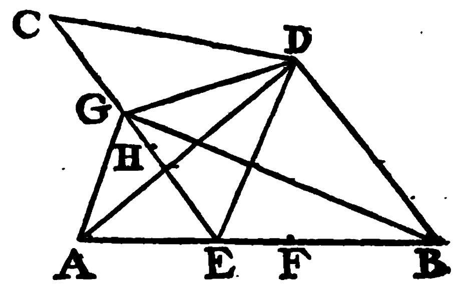
Cor. III. Datis in plano punctis quotlibet, quae diverſas habere ponantur gravitates; pondera autem eorum ad unum aliquod pondus datas habeant rationes; ſi ab ipſis et eorum centro gravitatis inflectantur rectae ad punctum quodlibet; erit ſumma ſpatiorum quae ad quadrata ex ductis a datis punctis, datas illas habent rationes, ſingula ad ſingula, aequalis ſpatio dato, una cum ſpatio quod eſt ad quadratum ex recta ducta a centro gravitatis, ut ſumma omnium ponderum eſt ad unum illud pondus.

Datum

Digitized by Google

Datum autem ſpatium aequale erit ſummae ſpatiorum, quae ad quadrata ex ductis a datis punctis ad centrum gravitatis, ſingula ad ſingula, praedictas datas habent rationes.

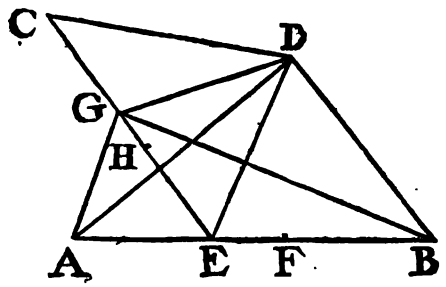
Sint data puncta A, B, C &c. et dicantur pondera in ipſis P, A; P, B; P, C; ſitque P, Q pondus illud ad quod datas habent rationes: et juncta AB ſecetur in E, et inveniatur recta EF, [Lem. 9.] ita ut P, A ſit ad P, Q, ut BE ad EF; ut vero P, Q ad P, B, ita ſit EF ad AE: ergo, ex aequo, erit P, A ad P, B; ut BE ad EA. Eſt igitur E centrum gravitatis ipſorum P, A; P, B. ſimiliter juncta EC ſecetur in G, et inveniatur recta GH, ita ut pondus in E, hoc eſt, P, A una cum P, B ſit ad P, Q; ut CG ad GH; ut vero P, Q ad P, C; ita ſit HG ad GE: ergo, ex aequo, erit P, A una cum P, B ad P, C; ut CG ad GE. eſt igitur punctum G centrum gravitatis ipſorum P, A; P, B; P, C; et ſimiliter procedendum ſi plura fuerint puncta. Ducantur a punctis datis ad punctum quodlibet D, rectae AD, BD, CD, et jungatur GD; ſintque a, b, c, ſpatia quae ad quadrata ex AD, BD, CD, ſingula ad ſingula, ſunt ut P, A; P, B; P, C ad ipſam P, Q. Itaque oſtendendum eſt eſſe ſpatia a, b, c, ſimul aequalia ſpatio dato, et ei quod ad quadratum ex GD eſt ut ſumma ipſorum P, A; P, B; P, C; ad P, Q. Quoniam, ex conſtructione, eſt P, A una cum P, B ad P, Q; ut CG ad GH; et etiam P, C ad P, Q ut EG ad GH, erit [24. 5.] ſumma ipſorum P, A; P, B; P, C; ad P, Q; ut CE ad CH. eſt autem a ad quadratum ex AD, ut (P, A ad P, Q, hoc eſt, ut) BE ad EF; et b ad quadratum ex BD, ut (P, B, ad P, Q, hoc eſt, ut) AE ad EF; et ſimiliter c eſt ad quadratum ex CD, ut EG ad GH. et eſt CG ad GH, ex conſtructione, ut (P, A una cum P, B, ad P, Q; hoc eſt, ut) AB ad EF. ergo, per ea quae oſtenduntur in articulo 4. caſ. 2. Propoſitionis hujus, erit ſumma ipſorum a, b, c, aequalis ſpatio dato et ſpatio e quod ad quadratum ex GD, eſt



Digitized by Google

eſt ut CE ad GH, hoc eſt, ex praemiſſis, ut ſumma ipſorum P, A; P, B; P, C; ad P, Q.

Spatium autem hoc datum, (cui ſc. una cum ſpatio e, aequalis eſt



ſumma ipſorum a, b, c) in citato articulo aequale oſtenſum fuit ſpatiis T, V, ſeu ſpatio quod ad quadratum ex AE, eſt ut BE ad EF una cum eo quod ad quadratum ex BE, eſt ut AE ad EF, et ſpatio quod ad quadratum ex CG, eſt ut EG ad GH, una cum eo quod ad quadratum ex EG, eſt ut CG ad GH. Ductis igitur AG, BG oſtendendum eſt hiſce ſpatiis aequalem eſſe ſummam ſpatiorum quae ad quadrata ex ipſis AG, BG, CG ſunt ut P, A; P, B; P, C; ad P, Q. eſt, per Lem. 10. id quod ad quadratum ex AG, eſt ut (BE ad EF, hoc eſt, ut) P, A ad P, Q; una cum eo quod eſt ad quadratum ex BG, ut (AE ad EF, hoc eſt, ut) P, B ad P, Q; aequale ei quod ad quadratum ex AE eſt ut BE ad EF, una cum eo quod ad quadratum ex EB, eſt ut AE ad EF, et inſuper ei quod ad quadratum ex EG, eſt ut (AB ad EF, hoc eſt ut) CG ad GH. aequalibus hiſce addatur id quod ad quadratum ex CG eſt ut (EG ad GH, hoc eſt ut) P, C ad P, Q; et erunt ſpatia quae ad quadrata ex ipſis AG, BG, CG ſunt ut P, A; P, B; P, C; ad P, Q, ſimul aequalia ſpatio quod ad quadratum ex AE, eſt ut BE ad EF; ei quod ad quadratum ex BE, eſt ut AE ad EF; ei quod ad quadratum ex EG, eſt ut CG ad GH; et ei quod ad quadratum ex CG, eſt ut EG ad GH; quod erat oſtendendum.

Et ex hoc ſequitur Corollarium ſimile Corollario 2. praecedente.

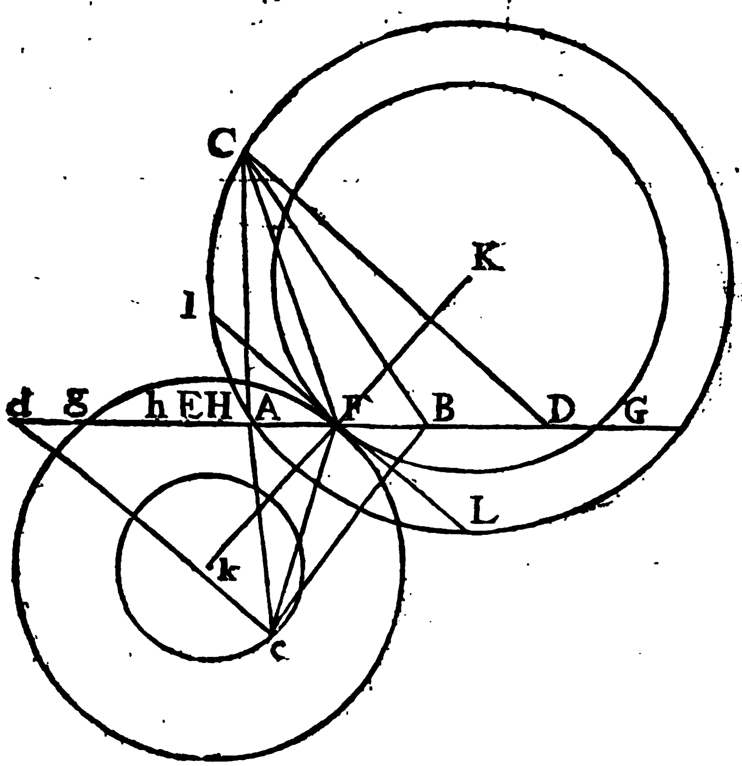
Prop. VI.

Quae 6ta eſt Lib. 2. Apollonii.

Si a duobus punctis datis inflectantur duae rectae lineae, a puncto autem [concurſus] ducatur recta parallela poſitione datae

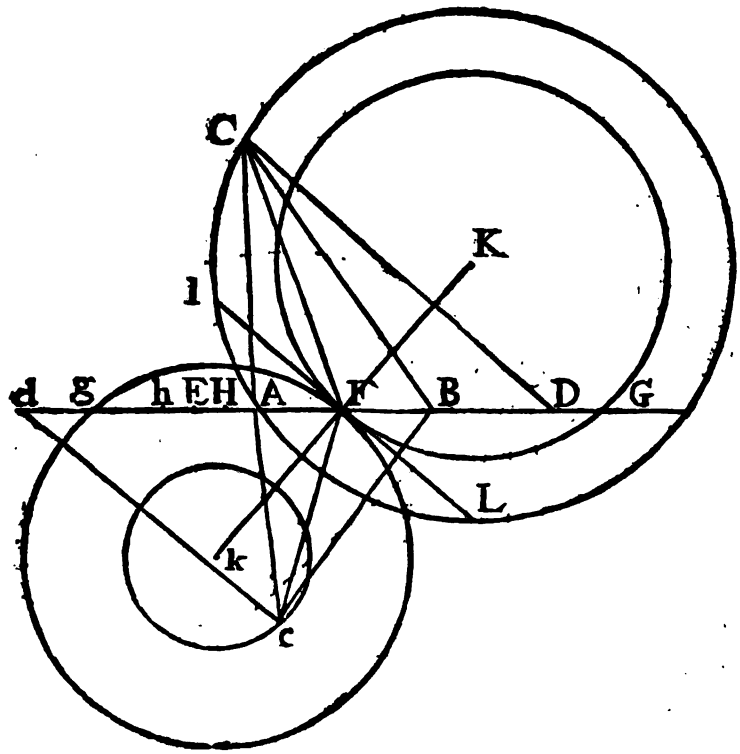
datae, auferens ab alia recta poſitione data ſegmentum dato puncto adjacens; ac ſit ſumma figurarum, ſpecie datarum, quae ab inflexis fiunt aequalis rectangulo contento data recta, et ſegmento abſciſſo: punctum [concurſus] tanget circumferentiam poſitione datam.

Cas. 1. Quando recta poſitione data a qua aufertur ſegmentum tranſit per punctum biſariam ſecans rectam quae data puncta conjungit. et figurae ſpecie datae ſunt quadrata.



Sint A, B, puncta data, et, ab ipſis, inflexis AC, BC, ducatur CD parallela rectae poſitione datae, auferatque ex recta poſitione data quaeque per medium ipſius AB punctum tranſit, ſegmentum DE dato

dato puncto E adjacens; et ſit ſumma quadratorum ex AC, BC aequalis rectangulo contento datâ rectâ et ſegmento DE. Tanget punctum C circumferentiam poſitione datam.

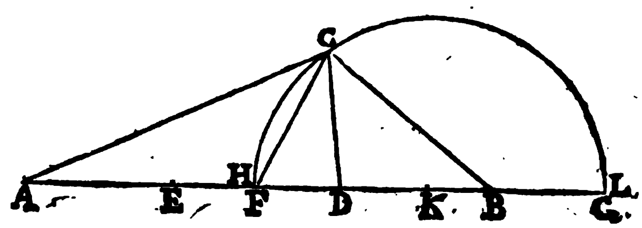


Occurrat DE ipſi AB in F, vel ſi DE tranſit per puncta A,B, bifariam ſecta ſit AB in F, et jungatur FC; ſitque bis FG vel Fg aequalis rectae datae. duplum igitur quadratorum ex AF, FC aequale eſt quadratis ex AC, CB [Lemm. 6.] hoc eſt, ex hypotheſi, rectangulo contento GF, DE bis. quare quadrata ex AF, FC ſimul aequalia erunt rectangulo contento GF, DE. ſit autem rectangulum contentum GF, EH aequale quadrato ex datâ AF; et propter datam FG dabitur EH, quae ponatur a puncto E verſus D. datum autem eſt punctum E, quare datum eſt H. Quoniam vero quadrata ex AF, FC ſimul

mul aequalia ſunt rectangulo contento GF, DE, quorum quadratum ex AF aequale eſt rectangulo GF, EH; erit reliquum quadratum ex FC aequale reliquo rectangulo GF, HD. ergo quoniam a dato puncto F ducta eſt FC, et a termino ejus C ducta eſt CD parallela poſitione datae auferens ex recta quae per punctum F tranſit ſegmentum DH dato puncto H adjacens, et eſt quadratum ex FC aequale rectangulo contento data recta FG, et ipſâ DH; tanget punctum C circumferentiam poſitione datam per Caſ. 1. aut 2. Prop. 3. Lib. 2. hujus.

Sit autem datum punctum E ad partes puncti F ad quas eſt A, (nam ſi ad partes contrarias fuerit compoſitio eodem prorſus modo fiet). et quoniam rectangulum GF, ED majus eſt contento GF, EH cadet punctum H inter E et D, ſeu D erit in EH producta ad partes H.

Et 1. Si incidat punctum H in ipſum F, hoc eſt, ſi quadratum ex

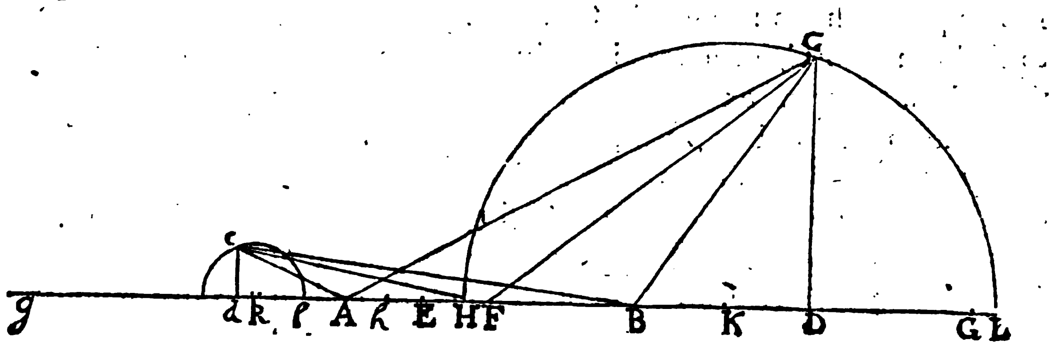


AF, aequale fuerit rectangulo GFE, et ſumatur punctum H ad eas partes puncti E, ad quas eſt F, compoſitio fiet per Caſ. 1. praedictae Prop. 3. quia ſc. quadratum ex FC aequale eſt rectangulo GFD.

2. Si rectangulum GF, EH, hoc eſt, quadratum ex AF minus fuerit rectangulo GFE, et ſumatur EH verſus punctum F, cadet punctum D verſus eaſdem partes, hoc eſt, vel inter H et F vel in HF producta ad partes F ad quas eſt B, nam ED major eſt EH; et propterea compoſitio fiet per *priorem* partem compoſitionis Caſ. 2. Prop. 3. Lib. 2. hujus.

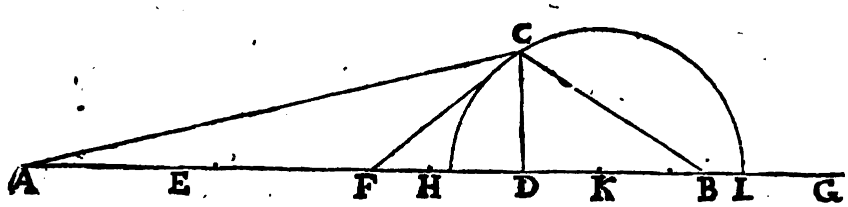
Digitized by Google

3. In alterutro ex hiſce caſibus in quibus ſc. quadratum ex AF aequale aut minus eſt rectangulo GFE; ſi ſumatur E *h* ad partes punc-



ti E contrarias iis ad quas eſt F, hoc eſt, ſi requiratur ut punctum *d* ſit ad eas partes, quoniam quadratum ex FC aequale eſt rectangulo GF, *d h* compoſitio fiet per poſteriorem partem ejus qui habetur in Caſ. 2. praedictae Propoſitionis. Quoniam vero in hoc caſu, ex determinatione in praedicta parte Caſ. 2. Prop. 3. Lib. 2. requiritur ut rectangulum *g* F *h* minus ſit quadrato ex F *k*, ſemidiametro ſc. circuli cujus ſegmentum ſuper F*g* capit angulum dato angulo *c d*F aequalem; debet propterea rectangulum *g*F, E *h* una cum ipſo *g*F E, hoc eſt, debet quadratum ex AF una cum rectangulo *g* F E minus eſſe quadrato ex F *k*.

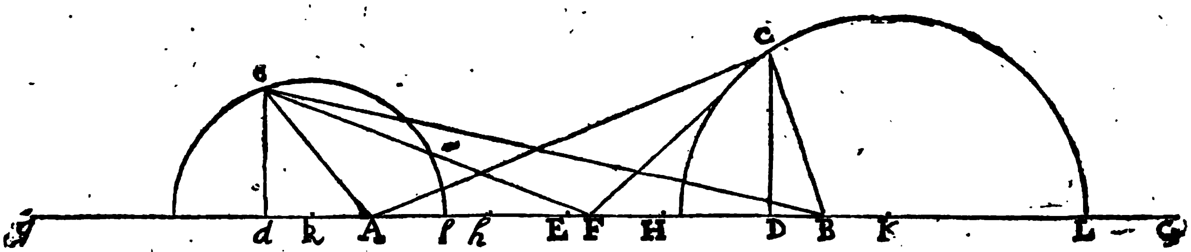
4. Si vero rectangulum GF, EH, hoc eſt, quadratum ex AF majus



fuerit rectangulo GFE, et ſumatur EH verſus punctum F, cadet punctum D verſus eaſdem partes, hoc eſt, in FH producta ad partes H; adeoque compoſitio fiet per poſteriorem partem compoſitionis Caſ. 2. Prop. 3. Lib. 2. hujus. et quoniam in hoc caſu requiritur, ut rectan-

rectangulum GFH minus ſit quadrato ex FK ſemidiametro circuli cujus ſegmentum ſuper FG capit angulum dato angulo CDF aequalem; debet propterea (addito ſc. communi rectangulo GFE) rectangulum GF, EH, hoc eſt, quadratum ex AF minus eſſe quadrato ex KF una cum rectangulo GFE.

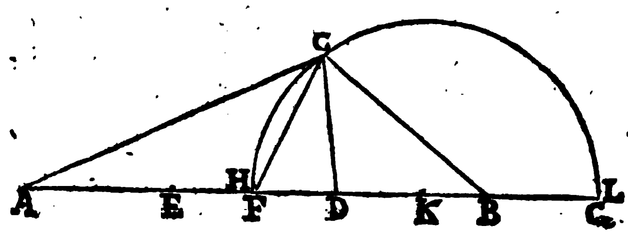
5. Et in hoc ultimo caſu ſc. in quo rectangulum GF, EH ſeu qua-



dratum ex AF majus eſt rectangulo GFE; ſi ſumatur E*h* ad partes puncti E contrarias iis ad quas eſt F, compoſitio fiet et determinatio eadem erit ut in praecedente articulo 3. dictum fuit.

Hiſce praemiſſis quae diſtinguendis caſibus, et determinationibus Loci neceſſaria ſunt,

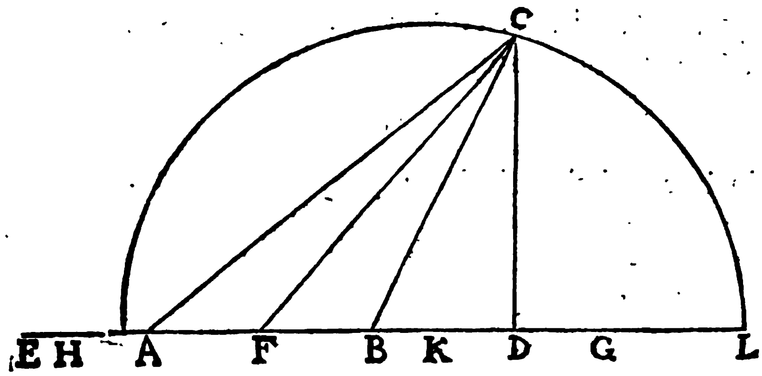
Componetur ita.

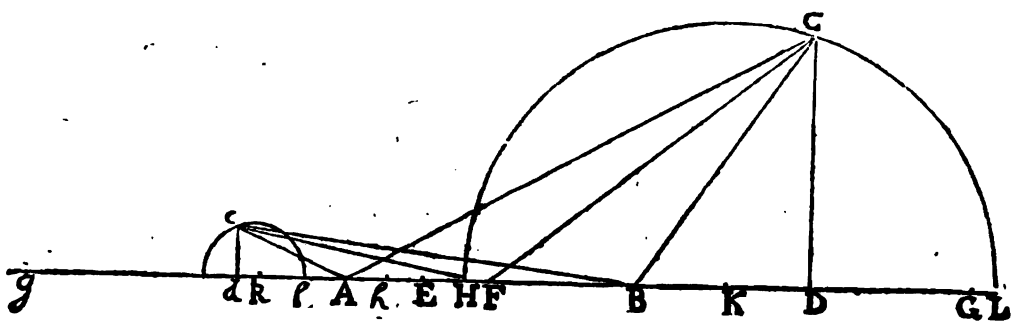


Sint A, B puncta data a quibus inflectendae ſunt rectae, ſitque E aliud in AB punctum datum; et recta magnitudine data aequalis ſit duplo rectae M; ſectâ vero AB biſariam in F, ipſis M et AF tertia

 proportionalis

proportionalis inveniatur N. et ſi fuerit quadratum ex AF aequale rectangulo contento ipſis M, FE vel eodem minus, ponatur a punc-



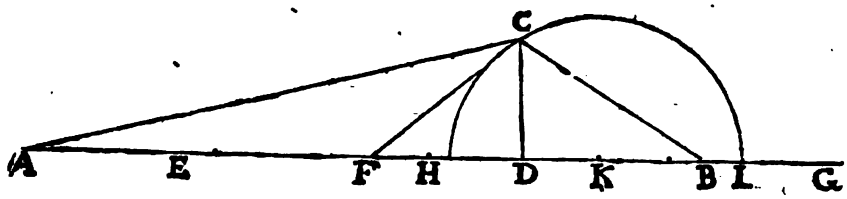


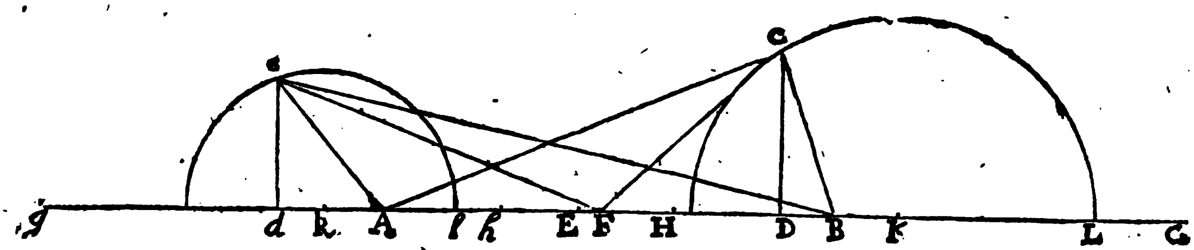
to F, verſus partes ad quas eſt B, ipſi M aequalis recta FG; et verſus eaſdem partes ponatur a puncto E recta EH aequalis ipſi N. et ſi quadratum ex AF aequale fuerit rectangulo GFE, deſcribatur circulus CL, ille ſc. duorum circulorum qui ſimul conficiunt Locum in Caſu 1. Prop. 3. Lib. 2. hujus, qui eſt ad eas partes puncti F ad quas eſt B, a cujus ſc. quovis puncto C ſi ad F ducatur recta CF, et ad FG ducatur CD parallelae poſitione datae, quadratum ex CF aequale erit rectangulo contento data GF, et ſegmento DF; at ſi quadratum ex AF minus fuerit rectangulo GFE, ope compoſitionis prioris partis Caſ. 2. ejuſdem Propoſitionis deſcribatur circulus CL a cujus quovis puncto C, ſi ducatur ad punctum F recta CF, et ab eodem ad FG ducatur CD parallela poſitione datae, quadratum ex CF aequale erit rectangulo

contento

contento datâ GF, et ſegmento DH inter ductam CD et datum punctum H: circumferentia alterius horum, prout caſus poſtulaverit, erit Locus quaeſitus; et quidem ſola, ſi quadratum ex AF una cum rectangulo GFE non minus fuerit quadrato ex KF ſemidiametro circuli cujus ſegmentum ſuper FG capit angulum dato angulo CDF aequalem. at ſi quadratum ex AF una cum rectangulo GFE minus fuerit quadrato ex KF, fiat F*g* aequalis ipſi FG, et E*h* aequalis ipſi EH; et per partem poſteriorem compoſitionis Caſus 2. praedictae Prop. 3. deſcribatur circulus Localis, eritque hujus circumferentia ſimul cum altera ex prioribus quam caſus poſtulat, Locus quaeſitus.

Si autem quadratum ex AF majus fuerit rectangulo contento rectis M, FE; ut Locus poterit conſtrui, neceſſe eſt quadratum ex AF minus ſit quadrato ex KF una cum rectangulo GFE, ut prius oſtenſum. ita igitur ſit, et ponantur rectae FG, EH ut dictum fuit, et per par-

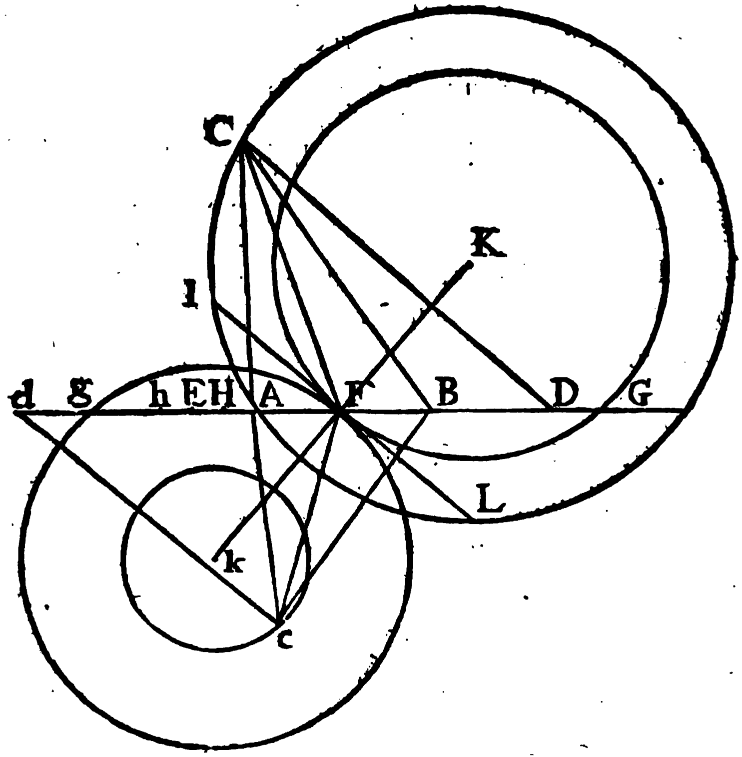




tem poſteriorem Caſ. 2. Prop. 3. Lib. 2. hujus deſcribatur circulus Localis, erit hujus circumferentia Locus quaeſitus; et quidem ſola, ſi quadratum ex AF una cum rectangulo GFE non minus fuerit quadrato ex KF. ſi autem minora fuerint ſpatia illa quadrato ex KF, fiat

F*g*

F*g* aequalis FG, et E*h* aequalis EH, et per praedictam poſteriorem partem Caſ. 2. deſcribatur circulus Localis puncto *h* conveniens, et utriuſque circumferentia erit Locus quaeſitus.



Oſtendendum autem eſt, ſi ſumatur punctum quodvis C in quavis ex praedictis circumferentiis, et jungantur AC, BC, et ducatur CD parallela poſitione datae, fore quadrata ex AC, BC ſimul aequalia rectangulo contento data recta, ſc. bis FG et ſegmento ED quod dato puncto E adjacet. Ita autem in omnibus caſibus oſtendetur. ex conſtructione, ope ſc. Prop. 3. facta, eſt quadratum ex FC aequale rectangulo contento GF, DH; eſt autem quadratum ex AF aequale rectangulo GF, EH; quadrata igitur ex AF, FC ſimul aequalia ſunt rectangulo GF, ED. ergo duplum quadratorum ex AF, FC, hoc eſt,

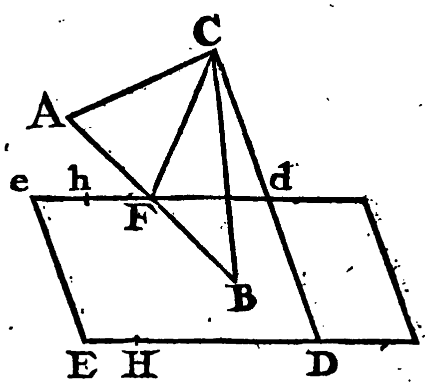
[Lemm.

Digitized by Google

[Lemm. 6.] quadrata ex AC, BC ſimul aequalia erunt rectangulo contento bis FG et ED.

Cas. 2. Quando recta poſitione data non tranſit per punctum biſariam ſecans AB, caeteris ut in praecedente manentibus.

Sint A, B puncta data, et ab ipſis inflexis AC, BC, ducatur CD parallela poſitione datae, auferatque ex alia poſitione data ſegmentum DE dato puncto E adjacens; et ſumma quadratorum ex AC, BC aequalis ſit rectangulo contento datâ rectâ, bis ſc. M et ſegmento DE. tanget punctum C circumferentiam poſitione datam.

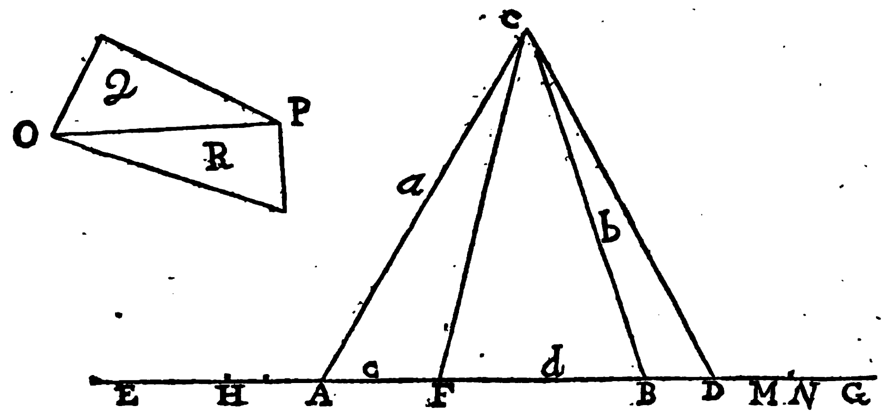


Bifariam ſectâ AB in F, jungatur FC, duplum igitur quadratorum ex AF, FC aequale eſt quadratis ex AC, BC [Lemm. 6.] hoc eſt, ex hypotheſi, rectangulo contento bis M, DE. quare quadrata ex AF, FC ſimul aequalia ſunt contento M, DE. ſit rectangulum contentum M, EH aequale quadrato ex AF, et reliquum quadratum ex FC aequale erit reliquo rectangulo M, DH. quoniam igitur a dato puncto F, ducta eſt FC, et a termino ejus C ducta eſt CD parallela poſitione datae auferens ex recta quae per F non tranſit ſegmentum DH dato puncto H adjacens, et eſt quadratum ex FC aequale rectangulo contento datâ rectâ M, et ipſa DH; tanget punctum C circumferentiam poſitione datam per Caſ. 3. Prop. 3. Lib. 2. hujus. et facta conſtructione qua reducitur Caſus ille tertius ad ſecundum, oſtendetur hic Caſus omnino ut praecedens.

Cas. 3. Quando figurae ſpecie datae non ſunt quadrata, reliquis ut in alterutro praecedente manentibus.

Sint A, B puncta data, et inflexis ab ipſis AC, BC, ducta ſit ad rectam poſitione datam recta CD parallela poſitione datae, auferens

rens ſegmentum DE dato puncto E adjacens; et ſit ſumma figurarum ſpecie datarum quae ab ipſis AC, BC deſcribuntur aequalis rectangulo contento datâ rectâ et ſegmento DE. tanget punctum C circumferentiam poſitione datam.



Sit a figura ſuper AC deſcripta, et b ea quae ſuper BC. Datae igitur ſunt [49. dat.] rationes a ad quadratum ex AC, et b ad quadratum ex BC. ergo, quoniam poſitione et magnitudine data eſt AB, dabitur [Lemm. 9.] punctum dividens AB in duo ſegmenta, quae ad datam rectam, datas habebunt has rationes. ſit punctum illud F, et FM data recta, ut ſc. BF ſit ad FM, ut a ad quadratum ex AC; AF vero ſit ad FM, ut b ad quadratum ex BC. et junctâ FC, erunt [Cor. Lemm. 10.] figurae a, b ſimul aequales ſpatio dato, et ei quod ad quadratum ex FC datam habet rationem, viz. quam habet AB ad FM. ex hypotheſi vero figurae a, b ſimul aequales ſunt rectangulo contento data recta, (quae ſit FN) et ſegmento DE. rectangulum igitur FN, DE aequale eſt dato ſpatio, et ei quod ad quadratum ex FC datam habet rationem. ſit datum illud ſpatium aequale rectangulo FN, EH. data igitur erit EH et punctum H. et reliquum rectangulum FN, DH aequale erit ei quod ad quadratum ex FC datam habet rationem. ut igitur DH ad FC, ita FC ad eam FG ad quam habet

FN

Digitized by Google

FN datam rationem [56. dat.] et data eſt FN, quare et FG; rectangulum vero FG, DH aequale eſt quadrato ex FC. ergo, quoniam a dato puncto F ducta eſt FC, et a termino ejus C recta CD parallela poſitione datae, et eſt quadratum ex FC aequale rectangulo contento data recta FG, et ſegmento DH dato puncto H adjacente; tanget punctum C circumferentiam poſitione datam, per Prop. 3. Lib. 2. hujus.

Componetur vero ita.

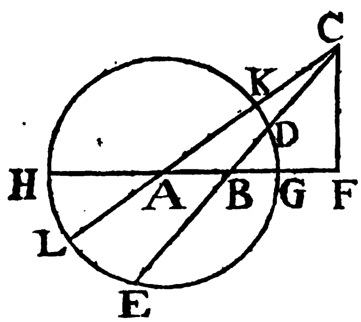
Super eandem rectam OP ſint figurae Q, R, quarum Q ſit ea cui ſimilis debet eſſe figura ſuper AC, R vero cui ſimilis ſuper BC deſcribenda eſt. et, per Lemm. 9. ſecetur AB in F, et inveniatur FM, ita ut BF ſit ad FM, ut Q ad quadratum ex OP; AF vero ſit ad FM, ut R ad quadratum ex OP. ſit vero FN aequalis rectae datae, et fiat ut AB ad FM ita FN ad FG. ſuper AF vero ſit figura c ſimilis ipſi Q, et ſuper FB ſit figura d ſimilis ipſi R; ipſiſque c, d ſimul aequale fiat rectangulum contentum FN, EH. per Propoſitionem vero 3. Lib. hujus 2. deſcribatur circumferentia a cujus quovis puncto C, ſi ducatur ad punctum F recta CF, et ab eodem ad FG ducatur CD parallela poſitione datae, quadratum ex FC aequale erit rectangulo contento data FG et ſegmento DH inter ductam CD et datum punctum H. erit haec Locus quaeſitus; hoc eſt, ſi jungantur AC, BC, et ſuper ipſas deſcribantur figurae a, b, quarum a ſimilis ſit ipſi Q; b vero ipſi R; erunt a, b ſimul aequales rectangulo contento data recta FN, et ſegmento DE. eſt enim, ex conſtructione, AB ad FM, ut (FN ad FG, hoc eſt, ut) rectangulum FN, DH, ad ipſum FG, DH, hoc eſt, ad quadratum ex FC. quare FN, DH rectangulum eſt id quod ad quadratum ex FC eſt ut AB ad FM. per Lemm. vero 10. figurae a, b, ſimul aequales ſunt ipſis c, d, et inſuper ei quod eſt ad quadratum ex FC ut AB ad FM. c vero una cum d, ex conſtructione, aequales ſunt rectangulo FN, EH; quod vero ad quadratum ex FC eſt ut AB ad FM, rectangulum eſt FN, DH; ergo figurae a, b, ſimul aequales ſunt rectangulis FN, EH; FN, DH; hoc eſt, rectangulo contento FN, DE.

Digitized by Google

Septima Libri 2di Apollonii propoſitio quae habetur in praefatione Pappi Alexandrini, a Clariſſ. Halleio libris duobus de Sectione rationis praefixa pag. 39, eſt ut ſequitur.

Si intra circulum poſitione datum detur punctum quodlibet, ac per idem ducatur recta quaevis, in qua ſumatur punctum aliquod extra circulum: ſit autem quadratum interceptae inter puncta illa aequale rectangulo ſub tota et parte exteriore ad circulum terminata, vel ſoli vel etiam adjuncto rectangulo ſub ſegmentis interioribus: punctum extra ſumptum datam poſitione rectam continget.

Locus hic non ſolum in Commandini, Fermatii et Schootenii verſionibus, ſed etiam in Graeco textu Halleii, et ut videtur in ipſis codicibus manuſcriptis omnino depravatus eſt. Nam non poteſt punctum inveniri extra circulum in quacunque recta per punctum datum, intra circulum, tranſeunte quod propoſitum in 2. Caſu Propoſitionis efficiet, niſi in ea ſola quae ad rectos angulos eſt diametro quae per punctum datum intra circulum tranſit. Sit enim circulus poſitione datus cujus centrum A, et datum ſit intra ipſum punctum B, per quod ducta ſit quaevis recta BC, quae ad rectos angulos non ſit diametro per B tranſeunte, nullum poterit eſſe in hac recta punctum quod faciet quadratum ex ſegmento inter ipſum et punctum B aequale rectangulo contento ſegmentis inter ipſum et puncta D, E quibus recta BC circumferentiae occurrit ſimul cum rectangulo EBD contento ſegmentis interioribus. Nam ſi fieri poteſt, ſit illud punctum C; et juncta AB et producta, ducatur ad ipſam perpendicularis CF, occurratque AB circulo in G, H, et AC jungatur circulo occurrens in K, L punctis. Quoniam igitur rectangulum LCK aequale eſt ipſi ECD [36. 3.] quadratum vero ex AK ſeu AG aequale eſt rectangu-



lo

lo HBG, ſeu EBD, una cum quadrato ex AB; additis aequalibus, erit rectangulum LCK una cum quadrato ex AK, hoc eſt, erit quadratum ex AC aequale rectangulis ECD, EBD una cum quadrato ex AB; rectangula autem ECD, EBD ſimul aequalia ſunt, ex hypotheſi, quadrato ex BC; quare quadratum ex AC aequale eſt quadratis ex BC, AB, et propterea rectus eſt angulus ABC [48. 1.]. Non autem eſt rectus, quod fieri non poteſt. Nullum proinde eſt in BD punctum quod propoſitum in enunciatione hujus Loci efficiet. non igitur recte affirmat Fermatius ad initium Prop. 7. Lib. 2. Apollonii de Locis planis reſtituti, Operum variorum Math. pag. 42. ſecundam partem hujus Loci per additionem aequalium ex priore derivari facile poſſe, pars enim ſecunda contradictionem, ut oſtenſum eſt, involvit. Schootenius vero pag. 291. Exercit. Math. adducit Problema, quaſi ſenſum hujus Apollonii Loci contineret, ſed inſcite omnino, nam apud illum recta tranſiens per datum intra circulum punctum, in qua ſupponit punctum extra circulum ſumptum verſari, poſitione data eſt, Normalis ſc. diametro circuli per punctum intra ipſum datum tranſeunte, ut oſtenſum fuit. Minime autem intelligenda eſt Propoſitio de punctis quorum unumquodque invenitur in una eademque recta per datum intra circulum punctum tranſeunte, ſed de punctis quorum unum aliquod invenitur in unaquaque recta quae per datum illud punctum tranſit, ut patet ex prima parte hujus Loci de cujus ſenſu nullum eſt dubium.

Quando autem accidit rectam lineam quae Locus eſt punctorum quae in rectis a dato puncto ductis ſita ſunt, tranſire per datum illud punctum in caſu quodam particulari ex conditionibus Loci oriundo; vertitur tum iſte Locus in Theorema, quod in Loco qui habetur in Prop. 9. ſequente obſervare licet, Locus enim ille in uno caſu vertitur in Propoſitionem Schootenii.

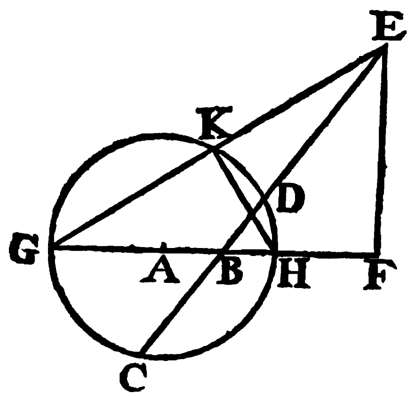
Inveni autem errorem in textum Graecum irrepſiſſe, nam vice verborum ἢ τῷ μόνῳ, ἢ τούτῳ τε καὶ τῷ ὑπὸ ſcribi debet ἢ τὸ μόνον ἢ τοῦτό τε καὶ τὸ ὑπὸ, quibus mutatis Locus erit ut ſequitur.

Digitized by Google

Propoſitio quae ſeptima eſt Lib. 2di Apollonii.

Si intra circulum poſitione datum detur punctum aliquod, ac per idem ducatur recta quaevis, et in ipſa ſumatur punctum aliquod extra circulum; ſit autem quadratum ex recta inter puncta illa intercepta aequale rectangulo contento tota et parte exteriore ad circulum terminata; vel ſolum ſc. quadratum, vel etiam quadratum hoc ſimul cum rectangulo contento ſegmentis duobus interioribus: punctum extra ſumptum tanget rectam poſitione datam.

Pars I. Sit circulus poſitione datus cujus centrum A, datumque ſit intra illum punctum B per quod ducatur quaevis recta occurrens circumferentiae in C, D punctis, et in CD extra circulum producta ſit punctum E faciens quadratum ex EB aequale rectangulo CED: tanget punctum E rectam poſitione datam.



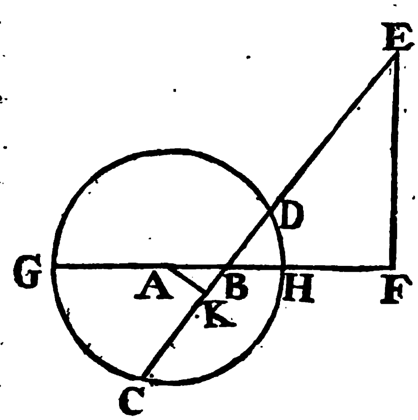
Jungatur AB et producatur, et ad ipſam a puncto E ducatur perpendicularis EF, occurratque AB circulo in G, H punctis, juncta vero GE occurrat eidem in K, et jungatur HK. Quoniam igitur quadratum ex GE aequale eſt quadratis ex GF, FE; erunt [2. 2.] rectangula EGK, GEK ſimul aequalia rectangulis FGH, GFH et quadrato ex FE, quorum rectangula EGK, FGH ſunt inter ſe aequalia (puncta enim F, H, K, E propter angulos rectos ad F, K ſunt in circulo) ergo reliquum GEK rectangulum aequale eſt rectangulo GFH una cum quadrato ex FE. Eſt autem GEK aequale rectangulo CED, hoc eſt, ex hypotheſi, quadrato ex BE, hoc eſt quadratis ex BF, FE; quadrata

quadrata igitur ex BF, FE ſimul aequalia ſunt rectangulo GFH et quadrato ex FE; quare quadratum ex BF, rectangulo GFH eſt aequale; et dempto communi rectangulo BFH, erit reliquum HBF rectangulum aequale reliquo contento ſc. ipſis GB, HF. Ut igitur HB ad BG, ita eſt HF ad FB, et datae ſunt HB, BG, quare data eſt ratio HF ad FB, et data eſt BH, quare [5. 2. dat.] data eſt BF, et punctum F; ergo et FE poſitione data eſt [29. dat.].

Componetur vero ita.

Per A, B puncta ducatur recta circulo occurrens in G, H, et ut GB ad BH, ita fiat BF ad FH, et per F ducatur recta perpendicularis ad BF; erit haec Locus quaeſitus, hoc eſt, ſi in ipſa ſumatur punctum quodvis E, et jungatur EB circulo occurrens in D, C; erit quadratum ex BE aequale rectangulo CED. nam quoniam ex conſtructione eſt GB ad BH, ut BF ad FH, erit rectangulum FBH aequale contento GB, FH; addatur commune rectangulum BFH, et quadratum ex BF aequale erit rectangulo GFH; igitur quadratum ex BF ſimul cum quadrato ex FE, hoc eſt, quadratum ex BE, aequale erit rectangulo GFH et quadrato ex FE, hoc eſt, rectangulo GEK, ſeu CED, ut in analyſi oſtenſum fuit. idem demonſtratur in Prop. 159. Lib. 7. Pappi Alexand.

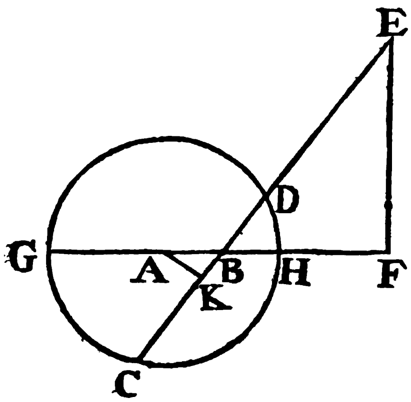
Pars II. Sit jam quadratum ex BE ſimul cum rectangulo CBD, aequale rectangulo CED, reliquis manentibus: tanget punctum E rectam poſitione datam.



Iiſdem enim conſtructis, quoniam quadratum ex BE ſimul cum rectangulo CBD aequale eſt rectangulo CED; erunt quadrata ex BF, FE ſimul cum rectangulo GBH [35. 3.] aequalia rectangulo CED, hoc eſt, rectangulo GFH una cum quadrato ex FE, auferatur commune

quadra-

quadratum ex FE, et erit quadratum ex BF ſimul cum rectangulo GBH aequale GFH rectangulo; addatur commune quadratum ex AH, et erunt quadrata ex AB, BF ſimul cum rectangulo GBH bis, aequalia quadrato ex AF; auferantur quadrata ex AB, BF, et rectangulum GBH bis aequale erit ipſi ABF bis, quare et GBH, ABF rectangula inter ſe aequalia erunt, et datur GBH, igitur datum eſt ABF, et data eſt AB; ergo et BF, et punctum F, rectaque FE poſitione.



Componetur vero ita.

Jungatur AB quae circulo occurrat in G, H punctis et rectangulo GBH aequale fiat ABF, ipſique AF ad rectos angulos ducatur FE; erit haec Locus quaeſitus, hoc eſt, ſi a quovis in ea puncto E ducatur per B recta EB circulo occurrens in C, D punctis, erit quadratum ex BE una cum rectangulo CBD aequale ipſi CED. nam quoniam rectangulum GBH bis aequale eſt ipſi ABF bis, additis quadratis ex AB, BF, erit quadratum ex AH una cum rectangulo GBH et quadrato ex BF aequale quadrato ex AF; et dempto quadrato ex AH, erit rectangulum GBH una cum quadrato ex BF aequale rectangulo GFH. addatur quadratum ex FE. et rectangulum GBH una cum quadratis ex BF, FE, hoc eſt rectangulum CBD una cum quadrato ex BE aequale erit rectangulo GFH et quadrato ex FE, hoc eſt, rectangulo CED.

Praecedens autem Propoſitio magis generalis poterit reddi, et aliter demonſtrari ut ſequitur.

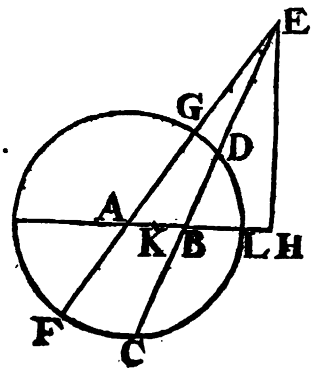
Si intra vel extra circulum poſitione datum detur punctum aliquod, ac per idem ducatur recta quaevis, in qua ſumatur punctum aliquod extra circulum, et ab ipſo ducatur quaevis recta circulo occurrens; ſit autem quadratum ex recta inter puncta illa intercepta aequale rectangulo contento ſegmentis rectae ad circulum ductae inter ipſius circumferentiam et rectam a dato puncto ductam interceptis: vel ſi quadratum

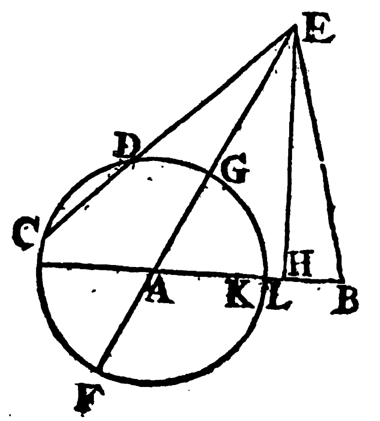
dratum illud ſpatio dato majus aut minus fuerit rectangulo praedicto: vel ſi quadratum et rectangulum ſimul ſint aequalia dato ſpatio, dummodo in hoc ultimo caſu recta a dato puncto ducta occurrat circulo, et in ipſa ſumatur punctum intra ipſum: punctum ſumptum tanget rectam poſitione datam. dividi autem poterit in quatuor propoſitiones ſequentes quarum prima ſit,

Prop. VII.

Cujus una pars eadem eſt cum parte 1. Prop. 7. Lib. 2. Apollonii.

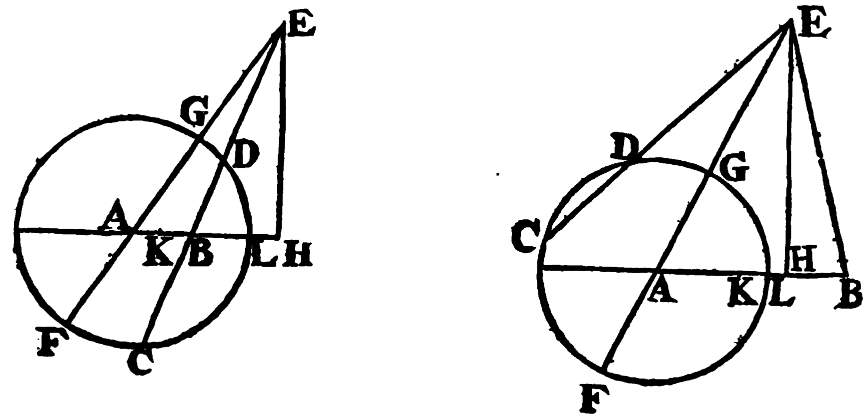
Sit circulus poſitione datus cujus centrum A, datumque ſit intra vel extra ipſum punctum B, per quod ducatur quaevis recta, et in ipſa extra circulum ſit punctum E, a quo ducta EDC ad circulum, ſit quadratum ex BE aequale rectangulo CED: tanget punctum E rectam poſitione datam.





Jungatur AB et AE quae occurrat circulo in F, G punctis. Quoniam igitur quadratum ex EB aequale eſt rectangulo CED, hoc eſt, [36. 3.] rectangulo FEG, addito communi quadrato ex AG; erunt quadrata

quadrata ex EB, AG ſimul aequalia rectangulo FEG et quadrato ex AG, hoc eſt, [6. 2.] quadrato ex AE, quod propterea excedit quadratum ex EB dato ſpatio quadrato ſc. ex AG. Quoniam igitur a



duobus punctis datis A, B inflexae ſunt AE, BE et quadrata ex ipſis dato ſpatio differunt; tanget E rectam poſitione datam per Prop. 1. Lib. 2. hujus.

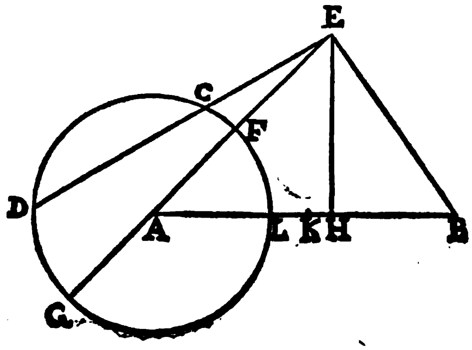
Componetur vero ita.

Ducatur ope compoſitionis Prop. 1. Lib. 2. recta EH quae Locus eſt punctorum a quorum quovis E ſi ducantur rectae ad data puncta A, B, quadratum ex AE majus ſit quadrato ex BE quadrato ex ſemidiametro circuli dati, (quod quidem fiet bifariam ſecando AB in K, et producendo AK ad H, ita ut rectangulum contentum KH et AB bis aequale ſit quadrato ex ſemidiametro AL, et ducendo HE ad angulos rectos ipſi AH) erit HE Locus quaeſitus. Quoniam enim ex conſtructione, ſumpto in HE quovis puncto E, junctiſque AE, BE, quadrata ex EB, AL ſimul ſunt aequalia quadrato ex AE, ablato quadrato ex AL ſeu AG, erit quadratum ex EB aequale rectangulo FEG, hoc eſt, ipſi CED.

Punctum autem H et propterea rectam HE ſemper extra circulum cadere ita oſtenditur, primo, ſi punctum K ſit intra circulum, hoc

eſt,

eſt, ſi AL major ſit LB, quoniam AB bifariam ſecta eſt in K, erit [8. 2.] quadratum ex BK, KL tanquam ex una linea, hoc eſt, erit quadratum ex AL majus rectangulo BKL quater; eſt autem rectangulum contentum KH et AB bis, hoc eſt, rectangulum BKH quater aequale quadrato ex AL; quare BKH quater majus eſt rectangulo BKL quater, ideoque eſt KH recta major KL, et punctum H cadet extra circulum. Si vero AL minor ſit LB, hoc eſt, ſi punctum K ſit extra circulum, manifeſtum eſt punctum H quod in LK producta ſitum eſt, extra eundem eſſe. quoniam vero, in caſu quo punctum B eſt extra circulum, quadratum ex AL minus eſt quadrato ex AB, erit rectangulum BKH quater minus quadrato ex K B quater, et propterea erit recta KH minor ipſâ KB, et punctum H cadet inter L et B puncta.



Prop. VIII.

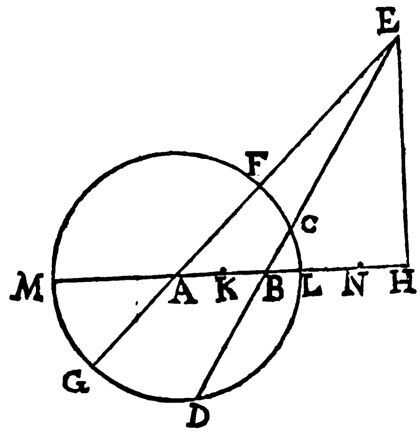
Cujus una pars vice eſt 2. partis Prop. 7. Lib. 2. Apollonii.

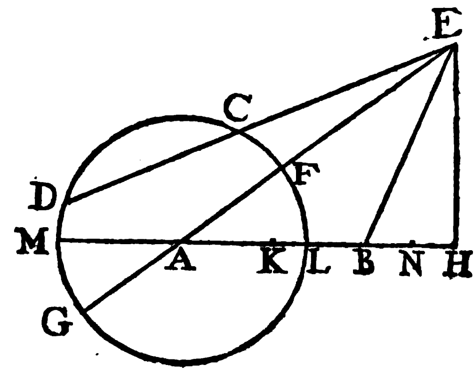
Jam ſit datum punctum B intra vel extra circulum, per quod ducatur quaevis recta: et in ipſa, extra circulum, ſit punctum E a quo ducta ECD ad circulum, ſit quadratum ex BE ſimul cum ſpatio dato P aequale rectangulo CED: tanget punctum E rectam poſitione datam.

Jungatur AB, occurrens circulo in M, L, et AE quae occurrat circulo in F, G punctis; quoniam igitur quadratum ex EB una cum

Digitized by Google

ſpatio dato P aequale eſt rectangulo CED, hoc eſt, ipſi FEG, addatur quadratum ex AL ſeu AG, et quadratum ex EB una cum ſpatio dato P, et quadrato ex AL aequale erit quadrato ex AE, quod propterea excedit quadratum ex BE dato ſpatio, ſpatio ſc. P et quadrato ex AL ſimul. Quare, per Prop. 1. Lib. 2. hujus, tangit punctum E rectam poſitione datam.





Componetur vero ita,

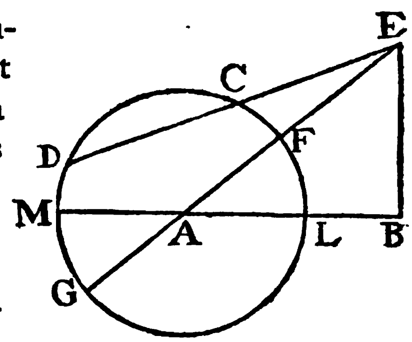
Sumatur AN quae poterit ſpatium P et quadratum ex AL ſimul; et bifariam ſecta AB in K, producatur AK ad H, ita ut rectangulum contentum AB et KH bis, hoc eſt, rectangulum BKH quater aequale ſit quadrato ex AN, et ducatur HE ad angulos rectos ipſi AH; erit haec locus quaeſitus: nam ſumpto in ipſa quovis puncto E, et junctis AE, BE; erit per Prop. 1. Lib. 2. hujus, ſumma quadratorum ex BE, AN aequalis quadrato ex AE, hoc eſt, ex conſtructione, erunt quadrata ex BE, AL una cum ſpatio dato P aequalia quadrato ex AE; et ablato quadrato ex AL ſeu AF, erit quadratum ex BE una cum ſpatio dato P aequale rectangulo FEG, hoc eſt, ipſi CED.

Punctum autem H, et propterea recta HE ſemper extra circulum cadet

Digitized by Google

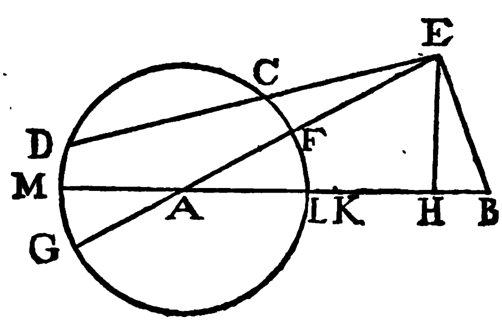
cadet ſc. in caſu in quo punctum K eſt intra circulum; hoc enim patet ſi K fuerit extra circulum. eſt enim rectangulum BKH quater majus quadrato ex AL, hoc eſt, ex BK et KL tanquam una linea. Multo igitur [8. 2.] majus eſt rectangulum BKH quater rectangulo BKL quater; ideoque et KH major eſt KL.

Exiſtente autem puncto B extra circulum, ſi ſpatium datum P aequale fuerit rectangulo MBL contento ſc. ſegmentis inter B et circumferentiam, erit quadratum ex BE una cum rectangulo MBL et quadrato ex ſemidiametro AL, hoc eſt, erunt quadrata ex BE, BA ſimul aequalia quadrato ex AE; ideoque eſt angulus ABE rectus [48. 1.], et recta BE poſitione dabitur, unde Locus in hoc caſu vertitur in Theorema ſequens, viz.

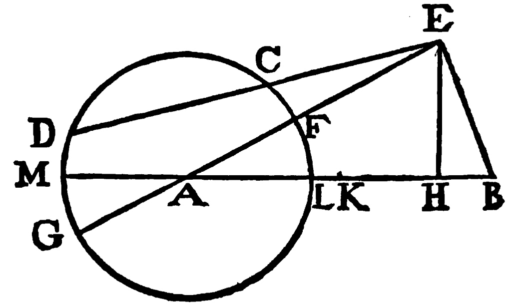


Si a puncto B extra circulum ducatur recta diametro MAL quae per B tranſit ad rectos angulos, et a quovis in ipſa puncto E ducatur quaevis EDC circulo occurrens in C, D punctis; erit quadratum ex BE una cum rectangulo MBL aequale rectangulo CED. Quadrata enim ex EB, BA ſimul aequalia ſunt quadrato ex AE, quorum quadratum ex LA aequale eſt quadrato ex AG; reliquum igitur quadratum ſc. ex BE una cum rectangulo MBL, aequale eſt reliquo rectangulo FEG ſeu CED.

Si autem in caſu quo punctum B eſt extra circulum, fuerit ſpatium datum P minus rectangulo MBL cadet recta EH inter L et B. Sin majus fuerit datum ſpatium eo rectangulo, cadet EH in LB productam verſus B. quoniam enim rectangulum BKH quater aequale

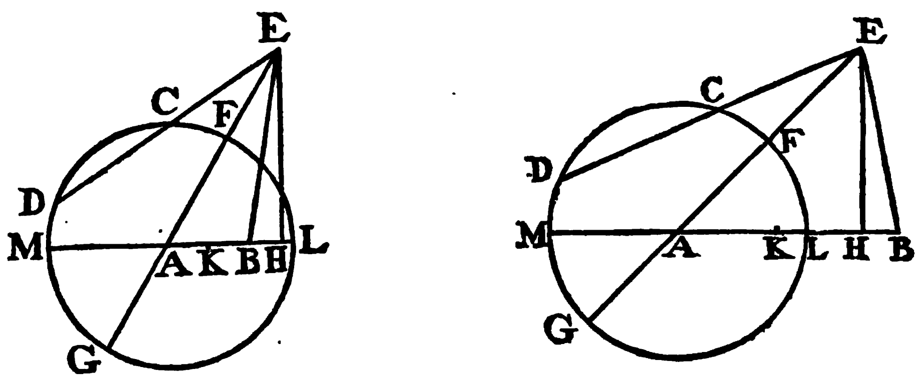


eſt, ex conſtructione, ſpatio P et quadrato ex AL; prout ſpatium P minus aut majus fuerit rectangulo MBL, erit rectangulum BKH quater minus aut majus (rectangulo MBL una cum quadrato ex AL, hoc eſt, minus aut majus quadrato ex AB, ſeu) quadrato ex BK quater, quare erit recta KH minor aut major ipsâ KB, et punctum H erit inter K et B, vel in KB productâ verſus B.



Prop. IX.

Sit jam quadratum ex BE aequale rectangulo CED ſimul cum ſpatio dato; reliquis ut in Prop. 8. manentibus. tanget punctum E rectam poſitione datam.

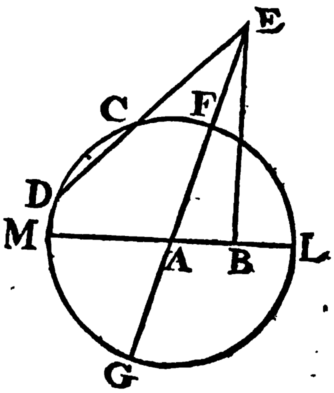


Primo, Sit ſpatium datum P minus quadrato ex ſemidiametro AL; quoniam igitur quadratum ex BE aequale eſt rectangulo CED ſeu

FEG

FEG ſimul cum ſpatio P, addito quadrato ex AF, ſeu AL, erunt quadrata ex BE, AL ſimul aequalia quadrato ex AE una cum ſpatio P. auferatur commune ſpatium P, et quadratum ex BE una cum exceſſu quadrati ex AL ſupra ſpatium P, aequale erit quadrato ex AE, quod propterea majus eſt quadrato ex BE dato iſto exceſſu. Deventum igitur eſt ad Prop. 1. Lib. 2. hujus, cujus ope compoſitio fiet prorſus ut in praecedente Prop. 8.

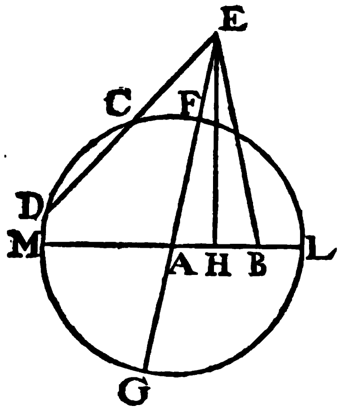
Si autem ſpatium datum P aequale fuerit rectangulo MBL, exiſtente puncto B intra circulum, quoniam quadratum ex BE aequale eſt, ex hypotheſi, rectangulis CED, ſeu FEG, et MBL, addito quadrato ex AL ſeu AF, erunt quadrata ex BE, AL ſimul aequalia quadrato ex AE et rectangulo MBL, et ablato communi rectangulo MBL, erit quadratum ex AE aequale quadratis ex BE, BA, quare [48. 1.] rectus eſt angulus ABE, et recta BE poſitione dabitur. Unde Locus in hoc caſu vertitur in ſequens Theorema, viz.



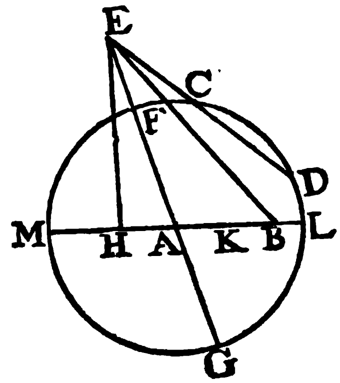
Si a puncto B in diametro circuli MAL ducatur recta diametro ad rectos angulos, et a quovis in ipſa puncto E extra circulum, ducatur recta ſecans circulum in C, D; erit quadratum ex BE aequale rectangulis CED, MBL. Quadrata enim ex EB, BA ſimul aequalia ſunt (quadrato ex AE, hoc eſt, rectangulo FEG una cum quadrato ex AF, hoc eſt) rectangulo CED una cum quadrato ex AL; et ablato communi quadrato ex AB, erit reliquum quadratum ex EB aequale reliquo, rectangulis ſc. CED, MBL. et hoc eſt Theorema quod vice Prop. 7. Lib. 2. Apollonii ſubſtituit Schootenius, de quo Theoremate in praemiſſis ſatis dictum fuit.

Secundo, Sit ſpatium datum P aequale quadrato ex ſemidiametro

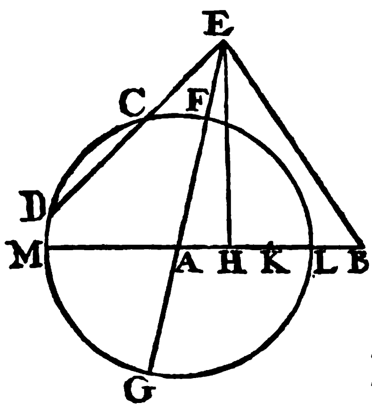
AL



AL ſeu AF; erit igitur quadratum ex BE aequale quadrato ex AE, et recta BE ipſi AE. Quare tanget punctum E rectam poſitione datam, quae ſc. ad rectos angulos eſt ipſi AB, eamque biſariam dividit, per Caſ. 1. Prop. 2. Lib. 2. hujus.



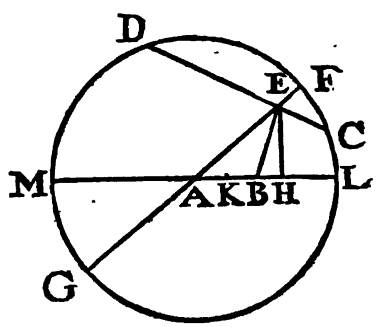
Tertio, Sit ſpatium datum P majus quadrato ex ſemidiametro, ſitque ipſorum exceſſus ſpatium Q. Quoniam igitur quadratum ex BE aequale eſt rectangulo FEG una cum quadrato ex ſemidiametro AF et ſpatio Q, erit quadratum ex BE aequale quadrato ex AE et ſpatio Q: tangit propterea punctum E rectam poſitione datam per Prop. 1. Lib. 2. hujus, et compoſitio fiet ut in praecedente Prop. 8. Recta autem KH ponenda eſt verſus punctum A, ad partes ſc. contrarias eis ad quas in praecedentibus poſita fuit.



Prop.

Prop. X.

Denique occurrat recta BE circulo, et in ipſa intra circulum ſumatur punctum E, ductaque CED quae occurrat circulo in C, D punctis, ſit quadratum ex BE una cum rectangulo CED aequale dato ſpatio: tanget E rectam poſitione datam.

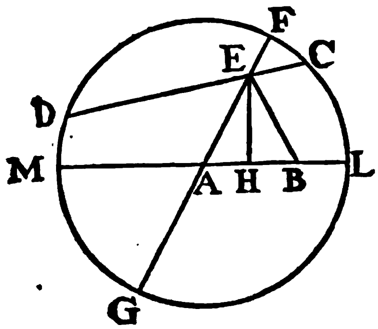


Jungatur AB quae occurrat circulo in M, L et AE occurrens eidem in F, G punctis. et primo, ſit ſpatium datum P minus quadrato ex ſemidiametro, ſitque ipſorum exceſſus ſpatium Q; et quoniam quadratum ex BE una cum rectangulo CED ſeu FEG aequale eſt ſpatio P, addito communi quadrato ex AE, erit quadratum ex BE una cum quadrato ex AG ſeu AL aequale quadrato ex AE una cum ſpatio P. et ablato ſpatio P, erit quadratum ex BE una cum ſpatio Q aequale quadrato ex AE. ergo tangit punctum E rectam poſitione datam per Prop. 1. Lib. 2. hujus; ex cujus compoſitione patet rectam EH, quae Locus eſt, cadere in AK productam verſus partes puncti K quo ſc. bifariam ſecta eſt AB; ita ut rectangulum BKH quater aequale ſit ſpatio dato Q; requiritur vero ut cadat intra circulum, hoc eſt, inter K et L; oportet igitur ut rectangulum BKH quater minus ſit rectangulo BKL quater, hoc eſt, ut ſpatium Q, ſeu exceſſus quadrati ex AL ſupra ſpatium P, minor ſit [8. 2.] exceſſu ejuſdem quadrati ex AL ſupra quadratum ex BL. Oportet igitur ſpatium datum P majus eſſe quadrato ex BL.

Secundo,

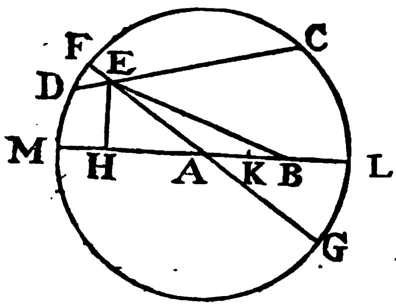
Digitized by Google

Secundo, Sit ſpatium datum P aequale quadrato ex ſemidiametro



AL ſeu AG; erit igitur quadratum ex BE una cum rectangulo CED ſeu FEG aequale quadrato ex AG, et ablato communi rectangulo FEG, erit quadratum ex BE aequale quadrato ex AE, et recta BE aequalis ipſi AE. quare tangit punctum E rectam poſitione datam, quae ſc. bifariam et ad rectos angulos dividit ipſam AB, per Caſ. 1. Prop. 2. Lib. 2. huj.

Tertio, ſit ſpatium P majus quadrato ex ſemidiametro AL ſeu AG,



ſitque eorum exceſſus ſpatium Q. Quoniam igitur quadratum ex BE una cum rectangulo CED, ſeu FEG aequale eſt (ſpatio P, hoc eſt) quadrato ex AG una cum ſpatio Q. ablato communi rectangulo FEG, erit quadratum ex BE aequale quadrato AE et ſpatio Q; ergo tangit punctum E rectam poſitione datam, per Prop. 1. Lib. 2. hujus. recta autem KH ponenda eſt verſus punctum A ad partes ſc. contrarias iis ad quas in primo caſu poſita fuit. Compoſitiones autem horum trium manifeſtae ſunt.

Eſt et alia Propoſitio generalis praecedenti ſimilis. ſc. Si intra vel extra circulum poſitione datum detur punctum aliquod, ac per idem ducatur recta quaevis circulo occurrens, et in ipſa ſumatur punctum aliquod intra circulum; ſit autem quadratum ex recta inter puncta illa intercepta aequale rectangulo contento ſegmentis inter punctum ſumptum et circulum: vel ſi quadratum illud majus aut minus fuerit praedicto rectangulo, dato ſpatio, vel ſi in recta a dato puncto utcunque ducta, ſumatur punctum extra circulum; fueritque quadratum et rectangulum ſimul aequalia dato ſpatio: tanget punctum ſumptum circumferentiam poſitione datam.

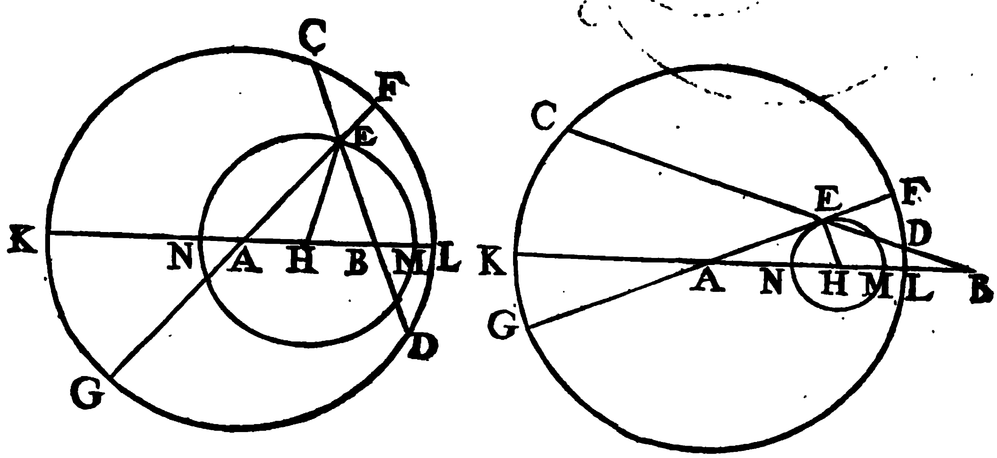
Haec etiam in quatuor propoſitiones dividitur quarum prima eſt,

Prop.

PROP. XI.

SIT circulus poſitione datus cujus centrum A, datumque ſit intra vel extra ipſum punctum B per quod ducatur quaevis recta circulo occurrens in C, D punctis, et in CD intra circulum ſit punctum E faciens quadratum ex EB aequale rectangulo CED: tanget punctum E circumferentiam poſitione datam.

Jungatur AB, et AE quae occurrat circulo in F, G punctis. Quo-



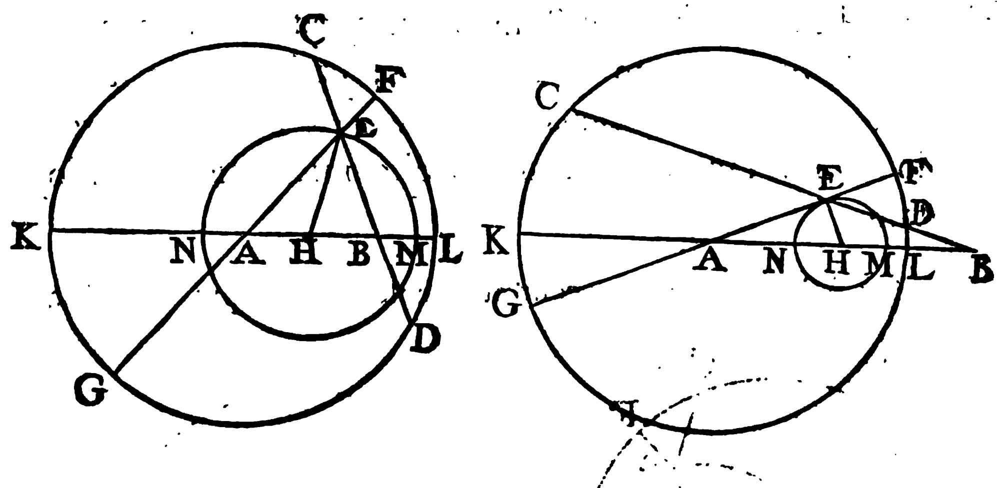
niam igitur quadratum ex EB aequale eſt rectangulo CED, hoc eſt, ipſi FEG, [35. 3.] addito communi quadrato ex AE, erunt quadrata ex AE, EB ſimul aequalia quadrato ex AG; datum autem eſt quadratum ex AG: ergo tangit punctum E circumferentiam poſitione datam, per Caſ. 1. Prop. 5. Lib. 2. hujus.

Componetur vero ita.

Bifariam ſectâ AB in H, et producta ad circulum in K, L, manifeſtum eſt, ex determinatione Prop. 5. hujus, oportere duplum quadrati ex

Digitized by Google

AH minus eſſe ſpatio dato, hoc eſt, quadrato ex AK; quare quadruplum quadrati ex AH, hoc eſt, quadratum ex AB, minus debet eſſe duplo quadrati ex AK; ideoque recta AB, minor debet eſſe diametro quadrati cujus latus eſt AK, quod quidem neceſſario fiet in Caſu in quo



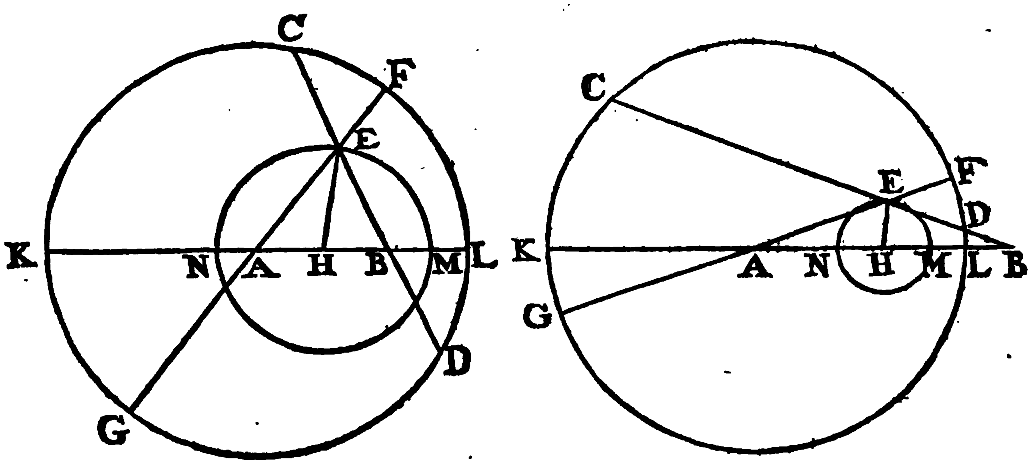
punctum B eſt intra circulum. Sit igitur AB minor diametro quadrati ex AK, et dimidium quadrati ex AB, hoc eſt, duplum quadrati ex AH minus erit quadrato ex AK; ſit horum exceſſus aequalis duplo quadrati ex MH, et centro H, intervallo HM, deſcribatur circulus, erit hujus circumferentia Locus quaeſitus, hoc eſt, ſi a quovis ipſius puncto E ducatur per B recta occurrens circulo cujus centrum A in C, D punctis, erit quadratum ex EB aequale rectangulo CED. Quoniam enim, ex conſtructione, circulus centro H deſcriptus eſt is cujus circumferentia eſt Locus in Caſ. 1. Prop. 5. deſcriptus, erunt quadrata ex AE, BE ſimul aequalia quadrato ex AK ſeu AG, et ablato quadrato ex AE, erit quadratum ex EB aequale rectangulo FEG, hoc eſt, ipſi CED.

Idem autem de punctis M, N in quibus Locus occurrit rectae AB ita oſtenditur; quoniam AB biſariam ſecta eſt in H, quadrata ex AM, MB ſimul aequalia ſunt [9. aut 10. 2.] duplo quadratorum ex AH, HM, hoc eſt, quadrato ex AK; quare ablato quadrato ex AM, erit quadratum

tum ex MB aequale rectangulo LMK. et ſimiliter oſtendetur quadratum ex NB aequale rectangulo LNK. Et quoniam quadrata ex AM, MB ſimul aequalia ſunt quadrato ex AK, erit AM minor AK, quare circulus Localis NEM totus intra circulum datum cadit, hoc eſt, punctum E ſemper intra eundem erit.

Prop XII.

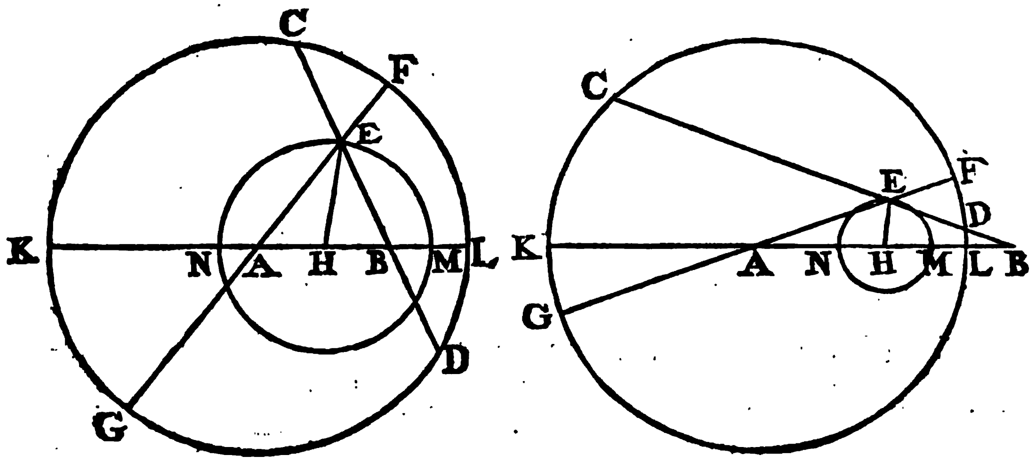
Jam ſit datum punctum B intra vel extra circulum, et per illud ducatur quaevis recta circulo occurrens in punctis C, D; et in ipſa intra circulum ſumatur punctum E, ſitque quadratum ex BE ſimul cum dato ſpatio P aequale rectangulo CED ſeu FEG: tanget punctum E circumferentiam poſitione datam.



Quoniam enim quadratum ex BE ſimul cum ſpatio P, aequale eſt rectangulo FEG; addito communi quadrato ex AE erunt quadrata ex BE, EA ſimul cum ſpatio P aequalia quadrato ex AG ſeu AK; et ablato utrinque ſpatio P, erunt quadrata ex BE, EA ſimul aequalia dato ſpatio, exceſſui ſc. quadrati ex AK ſupra ſpatium P. Tanget

Digitized by Google

propterea punctum E circumferentiam poſitione datam, per Prop. 5. Lib. 2. hujus.



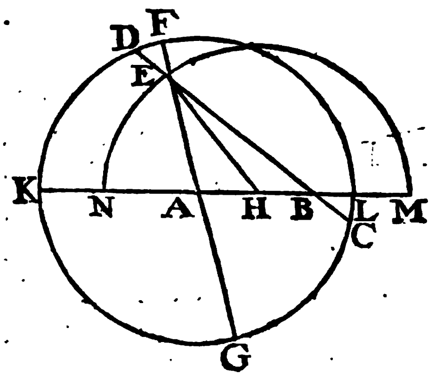
Compoſitio autem fiet ut in praecedente, bifariam ſc. ſecta AB in H, duplum quadrati ex AH minus debet eſſe exceſſu quadrati ex AK ſupra ſpatium P. Sit autem duplum quadrati ex AH ſimul cum duplo quadrati ex HM aequale praedicto exceſſui; et centro H, intervallo HM, deſcribatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaeſitus; quod prorſus ut in praecedente oſtendetur, ut et circulum Localem MEN totum intra datum circulum cadere.

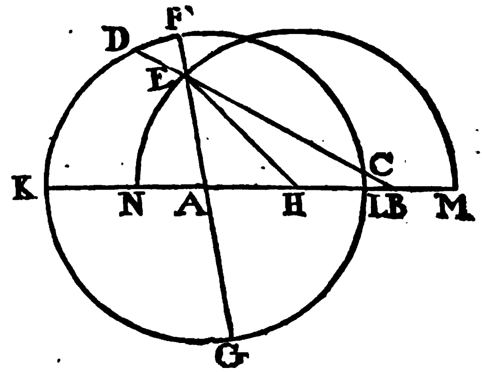
Prop. XIII.

Sit jam quadratum ex BE aequale rectangulo CED ſeu FEG ſimul cum dato ſpatio P, reliquis ut in praecedente manentibus: tanget punctum E circumferentiam poſitione datam.

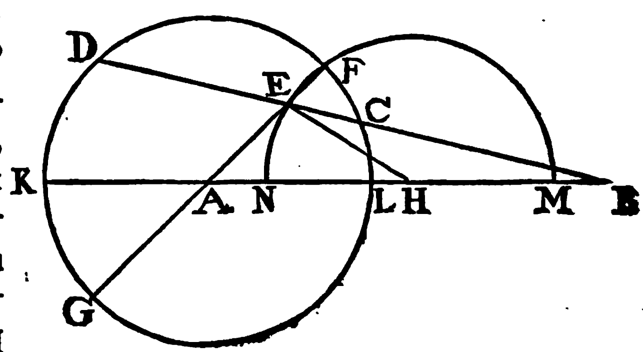
Quoniam enim quadratum ex BE aequale eſt rectangulo FEG una cum ſpatio P; addatur commune quadratum ex AE, et quadrata ex BE, AE ſimul aequalia erunt quadrato ex AG ſeu AL una cum ſpatio

tio P, hoc eſt ſpatio dato: ergo tanget punctum E circumferentiam poſitione datam, per Caſ. 1. Prop. 5. Lib. 2. hujus.

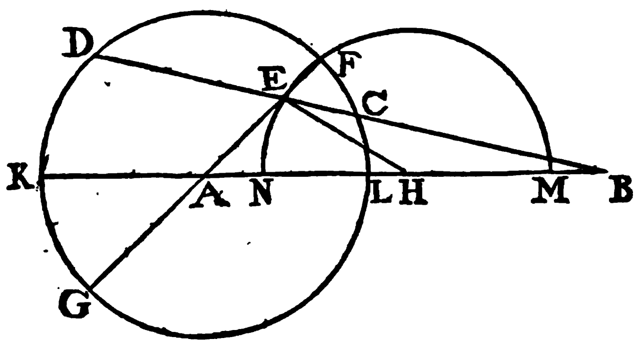




Bifariam autem ſecta AB in H, et producta ad circulum in K, L, punctis, quorum K remotius eſt a puncto B; manifeſtum eſt, ex determinatione Caſus citati, oportere duplum quadrati ex AH minus eſſe ſpatio dato, hoc eſt, quadrato ex AL una cum ſpatio P; quod quidem neceſſario fiet in Caſu quo punctum B eſt intra circulum. Praeterea quoniam requiritur ut punctum E cadat intra circulum datum, et eſt HK maxima recta quae a puncto H ad circumferentiam KDL duci poteſt [7, 8. 3.], ſive punctum H fuerit intra ſive extra circulum, major erit HK junctâ HE; quare duplum quadratorum ex KH, HA, hoc eſt, [10. 2.] quadrata ex KA, KB ſimul, majora erunt duplo quadratorum ex EH, HA, hoc eſt (ut ex compoſitione Caſ. 1. Prop. 5. Lib. 2. hujus patet) quadrato ex KA et ſpatio P ſimul. ablato igitur communi quadrato ex KA, reliquum quadratum ex KB reliquo ſpatio P majus erit. Similiter, in Caſu quo punctum H cadit extra circulum, quoniam LH

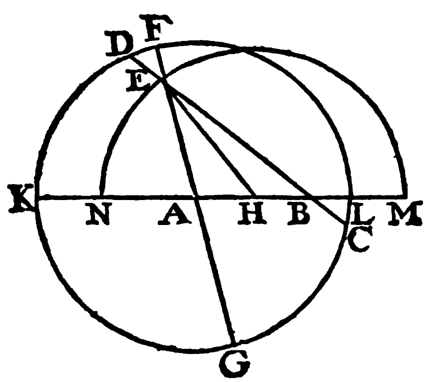


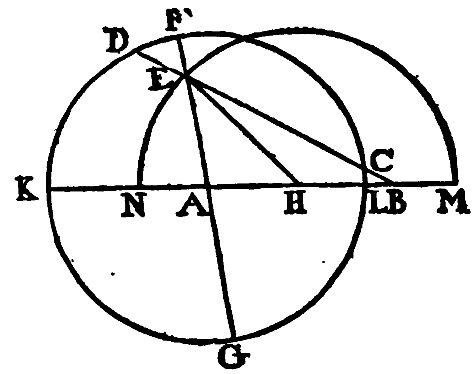
[8. 3.] minima eſt omnium quae a puncto H ad circulum datum cadere poſſunt, punctum autem E eſt intra eundem, erit LH minor



HE; quare duplum quadratorum ex AH, HL, hoc eſt [9. 2.] quadrata ex AL, LB, minora erunt (duplo quadratorum ex AH, HE, hoc eſt) quadrato ex AL et ſpatio P ſimul. ablato igitur quadrato ex AL, erit quadratum ex LB minus ſpatio P. Ut igitur poſſit Locus conſtrui, neceſſe eſt in omnibus caſibus duplum quadrati ex AH minus ſit quadrato ex AL et ſpatio P ſimul, et ut quadratum ex KB majus ſit ſpatio P; in caſu vero quo punctum H eſt extra circulum datum, neceſſe eſt praeterea ut quadratum ex LB minus ſit eodem ſpatio P. hiſce praemiſſis,

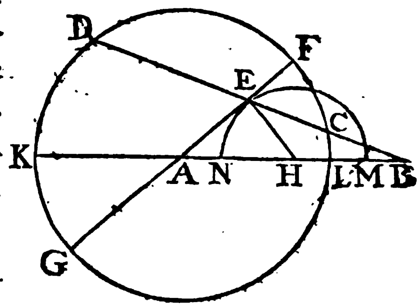
Componetur Locus ita.





Sit ſpatium datum P, et biſariam ſecetur AB in H. Quoniam igitur, ex determinatione praemiſſa, eſt quadratum ex AL una cum ſpatio P majus duplo quadrati ex AH, ſit ipſorum exceſſus aequalis duplo quadrati

quadrati ex HM, et centro H, intervallo HM, deſcribatur circulus qui rectae KL rurſus occurrat in N, punctorum autem M, N ſit N ipſi A propius. et quoniam, ex determinatione, quadratum ex KB majus eſt ſpatio P, erunt quadrata ex BK, KA, hoc eſt, erit duplum quadratorum ex KH, HA majus (quadrato ex KA ſeu AL et ſpatio P ſimul, hoc eſt, ex conſtructione) duplo quadratorum ex AH, HM. quare recta KH major eſt ipſa HM ſeu HN; ideoque ſi punctum H fuerit intra circulum datum cujus ſc. diameter eſt KAL, erit punctum N intra eundem, ideoque circulus centro H deſcriptus, vel pars ſaltem ipſius cadet intra circulum datum. Si autem punctum H fuerit extra circulum datum; quoniam, ex determinatione in hoc caſu, quadratum ex LB minus eſt ſpatio P, erunt quadrata ex AL, LB ſimul, hoc eſt, duplum quadratorum ex AH, HL minus (quadrato ex AL et ſpatio P ſimul, hoc eſt, ex conſtructione) duplo quadratorum ex AH, HN. quare, recta HL minor eſt ipſa HN; KH autem oſtenſa fuit major eadem HN; cadit igitur punctum N inter K, L, et propterea circulus centro H deſcriptus neceſſario, in hoc caſu, ſecabit circulum datum.

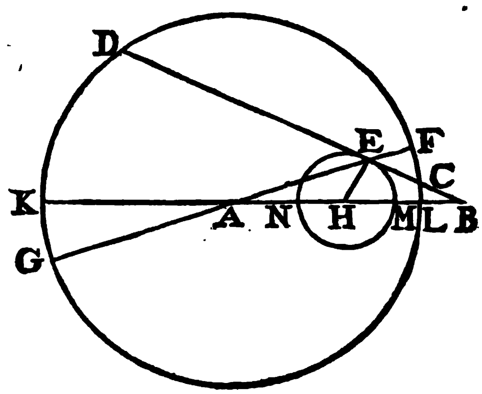


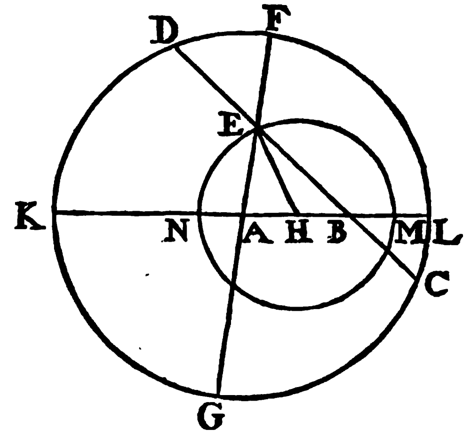
Hiſce praemiſſis, ſumatur in circuli deſcripti circumferentia punctum quodvis E intra circulum datum cujus centrum A, et ducatur BE occurrens circulo cujus centrum A in C, D; et AE eidem occurrens in F, G punctis; igitur, per Caſ. 1. Prop. 5. Lib. 2. hujus, quadrata ex BE, EA ſimul aequalia ſunt quadrato ex AK ſeu AF, et ſpatio P ſimul; et ablato communi quadrato ex AE, erit reliquum quadratum ex BE aequale rectangulo FEG ſeu CED, et ſpatio P ſimul.

Obſervandum eſt in Caſu quo punctum H eſt intra circulum datum, poſſe quadratum ex LB majus, aequale vel minus eſſe ſpatio

P;

P; ideoque erit LH major, aequalis vel minor ipſa HM, et circulus Localis propterea in primo Caſu cadet totus intra datum circulum,





in ſecundo eundem interius continget, in tertio vero ipſum ſecabit. quae eodem modo oſtenduntur quo recta LH oſtenſa fuit minor ipſa HN ſeu HM, in Caſu quo quadratum ex LB minus eſt ſpatio P, et punctum H extra circulum.

Vid. §

Prop. XIV.

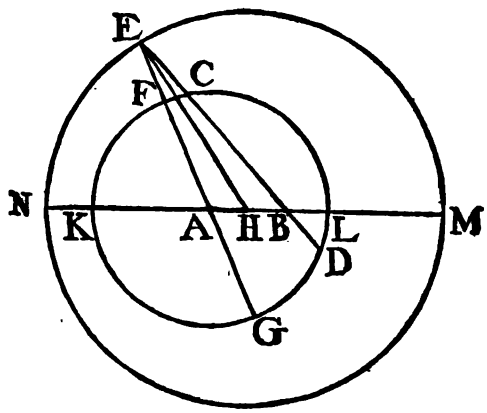
Denique ſit quadratum ex BE una cum rectangulo CED, ſeu FEG aequale ſpatio dato P; punctum autem E ſit extra circulum datum: tanget punctum E circumferentiam poſitione datam.

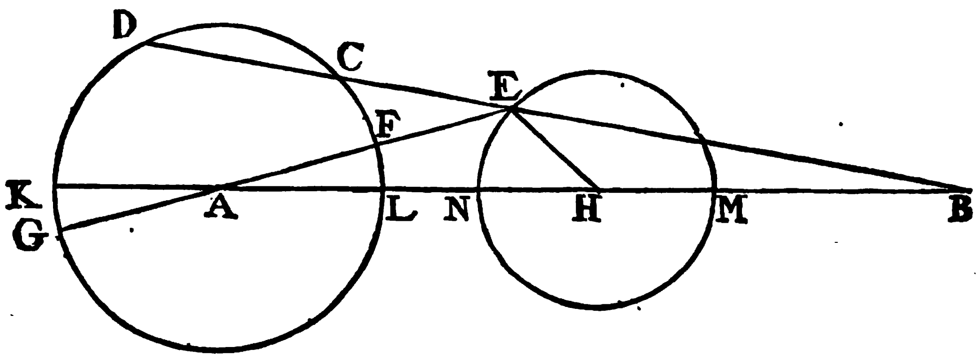
Quoniam enim quadratum ex BE una cum rectangulo FEG aequale eſt ſpatio P, addatur commune quadratum ex AG ſeu AK, et quadrata ex BE, AE ſimul, aequalia erunt quadrato ex AK et ſpatio P, hoc eſt ſpatio dato. ergo tangit punctum E circumferentiam poſitione datam per Caſ. 1. Prop. 5. Lib. 2. hujus.

Biſariam

Digitized by Google

Biſariam autem ſectâ AB in H, manifeſtum eſt, ex determinatione in Prop. 5. Caſu citato, oportere in omni caſu duplum quadrati ex AH minus eſſe quadrato ex AK una cum ſpatio P. et ſi punctum H fuerit intra circulum datum, quoniam eſt HL minima omnium quae a puncto H ad circumferentiam duci poſſunt, et eſt punctum E extra circulum; neceſſe eſt ut HL minor ſit ipſa HE. quare duplum quadratorum ex AH, HL, hoc eſt, qua-





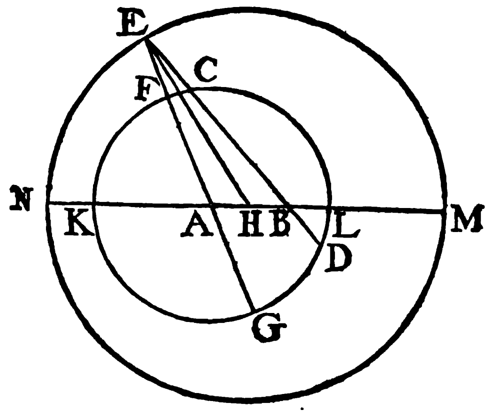
drata ex AL, BL ſimul minora ſunt (duplo quadratorum ex AH, HE, hoc eſt, ut conſtat ex compoſitione Caſus citati) quadrato ex AL et ſpatio P ſimul. quadratum igitur ex BL minus debet eſſe ſpatio P. hiſce praemiſſis,

Componetur ita,

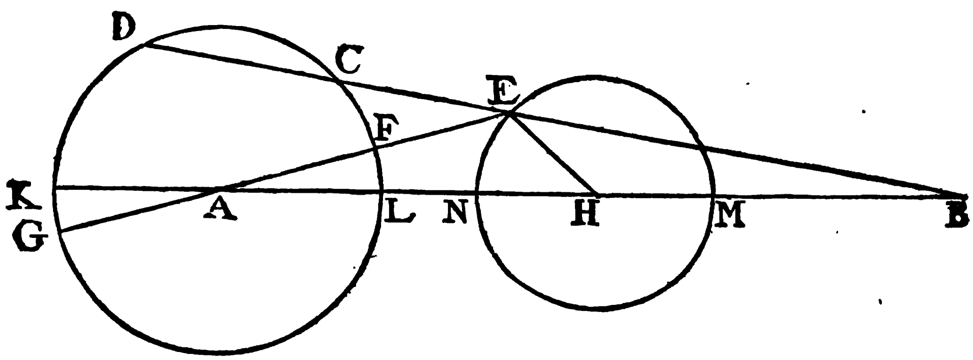
Sit ſpatium datum P, et biſariam ſecetur AB in H, et ſit exceſſus quadrati ex AK ſeu AL, una cum ſpatio P, ſupra duplum quadratum ex AH aequalis duplo quadrati ex HM, centro vero H, intervallo HM, deſcribatur circulus occurrens rectae KL rurſus in N; punctorum autem M, N ſit N ipſi A propius. Si igitur centrum H deſcripti circuli fuerit extra circulum datum, manifeſtum eſt circulum illum extra

Digitized by Google

hunc cadere ad partes puncti H verſus B. Si autem fuerit punctum H



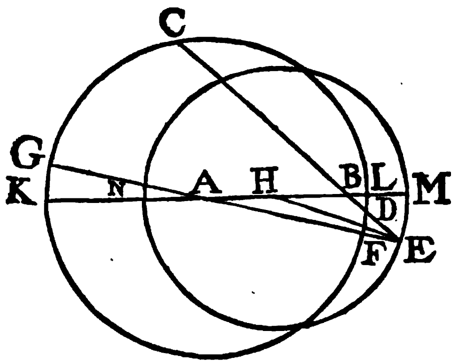
intra circulum datum, quoniam, propter determinationem in hoc Caſu, quadratum ex BL minus eſt ſpatio P; quadrata ex AL, BL ſimul, hoc eſt, duplum quadratorum ex AH, HL minus erit (quadrato ex AL una cum ſpatio P, hoc eſt, ex conſtructione) duplo quadratorum ex AH, HM. eſt igitur recta HL minor ipſa HM, ideoque circulus cen-

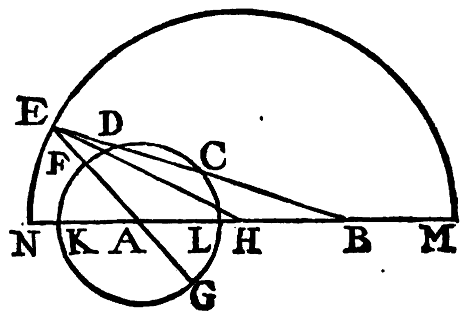


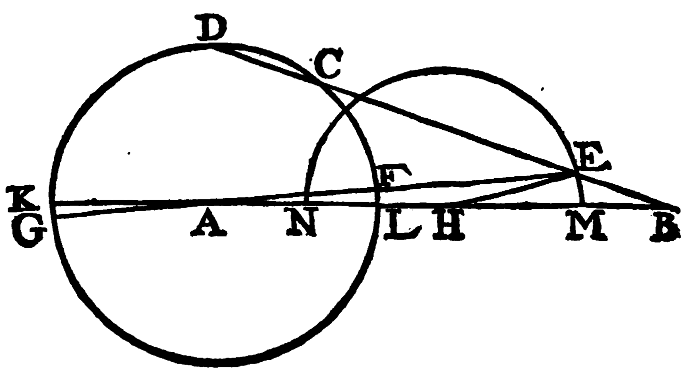
tro H, intervallo HM, deſcriptus cadet extra circulum datum ad partes puncti L. Sumatur in circumferentia circuli deſcripti quodvis punctum E extra circulum datum, et ducatur BE occurrens circulo dato in C, D; et AE eidem occurrens in F, G punctis. igitur, per Caſ. 1. Prop. 5. Lib. 2. hujus, quadrata ex BE, EA ſimul aequalia ſunt quadrato ex AK et ſpatio P. et ablato communi quadrato ex AK ſive AG; erit quadratum ex BE una cum rectangulo FEG ſive CED aequale ſpatio dato P.

Poterit

Poterit autem circulus Localis vel datum circulum includere, ſc. ſi ſpatium P majus ſit quadrato ex BK, vel totus extra datum circulum cadere, ſc. ſi ſpatium P minus ſit quadrato ex BL, et punctum H ſit extra circulum datum; vel denique poterit circulum datum ſecare, ſc. ſi ſpatium P minus fuerit quadrato ex BK, majus autem quadrato ex BL, quae ex iis quae in Prop. 13. dicta ſunt, manifeſta erunt.







LOCORUM PLANORUM APOLLONII

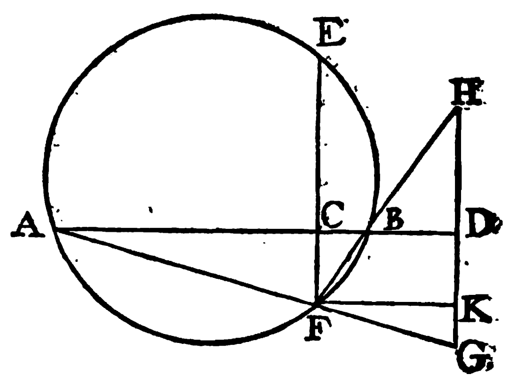
F I N I S.

APPENDIX.

OPERAE pretium viſum eſt Lemmatibus Prop. 5. Lib. 2. ſequentia duo apponere, quibus Lemmata duo Pappi 7^{timum} ſc. et 8^{vum} magis generalia redduntur; eximii enim ſunt uſus in multis Problematibus et Locis ſolvendis, Tertium quoque additum eſt cujus ope utendum eſt in quibuſdam ex Locis in quibus vice ſummae quadratorum vel ſpatiorum in Prop. 5. Lib. 2. hujus, datus eſt exceſſus quorundam ex iis ſuper reliqua quadrata vel ſpatia. Quartum denique additum eſt cujus ope Prop. 33. Lib. 1. hujus extendi poteſt ad quotcunque rectas.

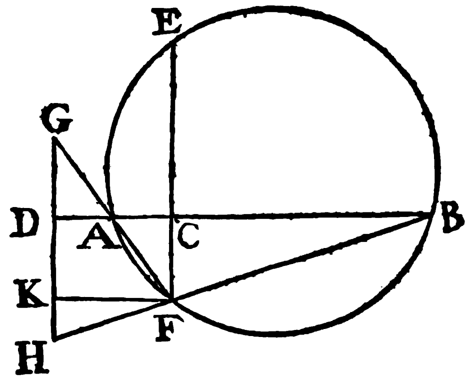
LEMMA I.

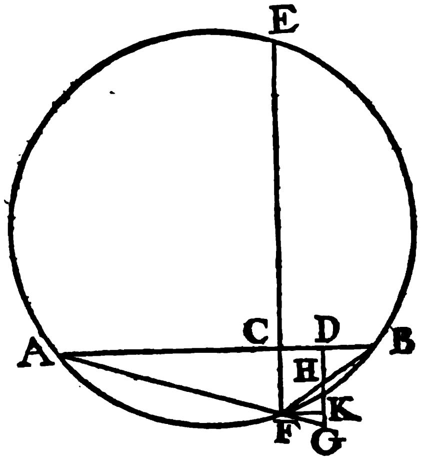
Sit recta linea AB, et in ipſa duo puncta C, D, quorum C ſit inter A et B: et ſit CE quaevis recta: erit id quod eſt ad quadratum ex AD, ut BC ad CE, una cum eo quod eſt ad quadratum ex BD, ut AC ad CE, aequale ei quod ad quadratum ex AC, eſt ut BC ad CE, et ei quod ad quadratum ex BC, eſt ut AC ad CE, et inſuper ei quod ad quadratum ex CD, eſt ut AB ad CE.



Ponatur CE ad rectos angulos ipſi AC, et per A, B, E, puncta deſcribatur circulus, cui EC rurſus occurrat in F; et junctis AF, BF, ducatur DG parallela ipſi CF, iiſdem occurrens in G, H; ad DG vero ducatur recta FK parallela ipſi CB.

Eſt igitur rectangulum FCA id quod ad quadratum ex AC, eſt ut (FC ad CA, hoc eſt ut) BC ad CE. et rectangulum FCB eſt id quod





ad quadratum ex CB, eſt ut (FC ad CB, hoc eſt ut) AC ad CE. Quoniam vero eſt BC ad CE, ut (FC ad CA, hoc eſt ut) GK ad KF ſeu CD; et quoniam eſt AC ad CE, ut (FC ad CB, hoc eſt ut) HK ad KF; erit, per 24, 5. AB, ad CE, ut GH ad KF ſeu CD. ergo rectangulum contentum GH, KF, eſt id quod ad quadratum ex KF ſeu CD, eſt ut (GH ad KF, hoc eſt ut) AB ad CE. Praeterea eſt rectangulum GDA id quod ad quadratum ex AD, eſt ut (GD ad DA, hoc eſt ut FC ad CA, hoc eſt ut) CB ad CE. et rectangulum HDB eſt id quod ad quadratum ex DB eſt ut (HD ad DB, hoc eſt ut FC ad CB, hoc eſt ut) AC ad CE. Itaque oſtendendum eſt eſſe rectangula GDA, HDB ſimul aequalia rectangulis FCA, FCB et inſuper ei quod GH, KF continetur. et ſumptis triangulis quae ipſorum ſunt dimidia, oſtendendum eſt triangula GDA, HDB ſimul aequalia eſſe triangulis AFB, GFH, quod quidem manifeſtum eſt.

Cor. Si recta CE aequalis fuerit ipſi CB, Lemma hoc idem eſt cum Lem. 7. Pappi. Si autem CE aequalis fuerit rectae AB, erit id quod ad quadratum ex AC, eſt ut BC ad CE una cum eo quod ad quadratum ex BC, eſt ut AC ad CE aequale, ut oſtenſum fuit, rectangulis FCA, FCB, hoc eſt rectangulo FC, AB hoc eſt, quia aequalis eſt CE ipſi AB, rectangulo FCE ſeu ACB. id vero quod eſt ad quadratum ex CD, ut

AB

AB ad CE, eſt ipſum ex CD quadratum. Lemma igitur in hoc caſu ita enunciari poteſt,

Si in recta linea AB ſumantur duo puncta C, D, quorum C ſit inter A et B; erit id quod eſt ad quadratum ex AD, ut BC ad BA, una cum eo quod eſt ad quadratum ex BD, ut AC ad AB aequale rectangulo ACB et quadrato ex CD ſimul.

Lemmate hoc uſus ſum ad demonſtrandos Caſus Prop. 5. Lib. 2. in quibus figurae ſpecie datae non ſunt quadrata, antequam inveneram Lem. 10. Alias autem ejus demonſtrationes, olim, hortatu meo, excogitarunt diſcipuli quondam mei Dominus Jacobus Moor, et Dominus Matthaeus Steuart, quorum prior literas Graecas in hac Academia, alter Matheſin in Academia Edinburgenſi, magna cum laude profitetur. Et demonſtratio quidem Dom. Jac. Moor ſimilis omnino eſt iis quae habentur in Prop. 9. et Prop. 10. Lib. 2. Element. Euclidis, quas Lemmatis hujus caſus eſſe ſimpliciſſimos recte obſervavit. Dom. Matth. Steuart aliam etiam ultimi Caſus Lem. 10. demonſtrationem dedit in Prop. 1. et 2. Libri ſui de quibuſdam Theorematibus generalibus, &c. qui prodiit Edinburgi anno 1746, ejuſque uſum in eximiis quibuſdam propoſitionibus demonſtrandis oſtendit.

LEMMA II.

Sit recta linea AB poſitione et magnitudine data, et in ipſa, vel in ipſa ad utraſvis partes producta, ſumatur quodvis punctum C; erit id quod ad quadratum ex AC datam habet rationem, una cum eo quod ad quadratum ex BC datam habet rationem, aequale ſpatio dato, una cum eo quod ad quadratum ex ſegmento inter punctum C et datum punctum in recta AB, datam habet rationem.



Sit M id quod ad quadratum ex AC, et N id quod ad quadratum ex BC datam habet rationem. et per Lem. 9. Lib. 2. hujus, inveniatur in

AB

AB punctum D, et recta DE, ita ut M ſit ad quadratum ex AC, ut BD ad DE, et N ſit ad quadratum ex BC, ut AD ad DE. datum igitur eſt punctum D. et per Lem. 1. praecedens, erit M una cum N aequale

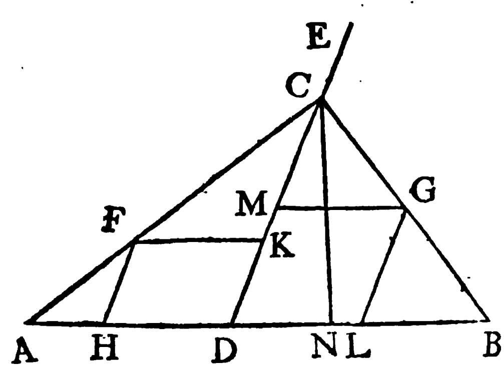


ei quod ad quadratum ex AD datam habet rationem BD ad DE, una cum eo quod ad quadratum ex BD datam habet rationem AD ad DE, et inſuper ei quod ad quadratum ex CD datam habet rationem AB ad DE. Datae autem ſunt rectae AD, DB, et quadrata ex ipſis, quare et data ſunt ſpatia quae ad quadrata haec datas habent rationes. Ergo M una cum N aequale eſt datis hiſce ſpatiis, una cum eo quod ad quadratum ex ſegmento CD inter punctum C et datum punctum D, datam habet rationem.

LEMMA III.

Si a vertice C trianguli ABC ducatur utcunque CD ad baſim; erit id quod ad quadratum ex AC, eſt ut BD ad BA, una cum eo quod ad quadratum ex BC, eſt ut AD ad AB, aequale rectangulo ADB una cum quadrato ex DC.

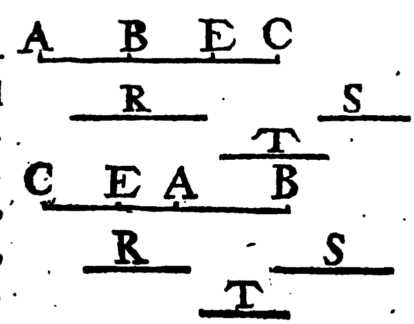
Lemma hoc eſt caſus Lem. 10. Lib. 2. in quo recta DE aequalis eſt ipſi AB; et, ex ibi oſtenſis, ita demonſtratur. Quoniam, facta Lemmatis 10. conſtructione, oſtenſum fuit rectangulum FCA una cum ipſo GCB aequale rectangulis HDA, LDB, KCD et MCD; quorum KCD, MCD ſimul, oſtenſa fuerunt habere ad quadratum ex DC rationem AB ad DE, erunt KCD, MCD in hoc caſu ſimul aequalia quadrato



quadrato ex DC. et quoniam aequales oſtenſae ſunt HD, DL, erunt rectangula HDA, LDB ſimul aequalia rectangulo HD, AB. ergo rectangula FCA, GCB ſimul aequalia ſunt ipſi HD, AB una cum quadrato ex DC. eſt autem HD ad AD, ut (FC ad CA, hoc eſt, ex conſtructione, ut) BD ad DE ſive AB. quare rectangulum HD, AB aequale eſt ipſi ADB. ergo rectangulum FCA, ſive id quod ad quadratum ex AC eſt ut BD ad BA, una cum ipſo GCB, ſive id quod eſt ad quadratum ex BC, ut AD ad AB, ſimul aequalia ſunt rectangulo ADB et quadrato ex DC.

Similiter Caſus ultimus Lem. 10. qui ſine ope ejus oſtenſus fuit, ita breviter ex eo oſtendetur. Eſt ſc. Caſus Lemmatis 10. in quo recta DE aequalis eſt ipſi DB. et oſtendendum eſt quadratum ex AC una cum eo quod ad quadratum ex BC, eſt ut AD ad DB ſive DE, aequale rectangulo BAD una cum eo quod ad quadratum ex DC, eſt ut AB ad BD. quod quidem patet, quoniam id quod ad quadratum ex AD, eſt ut BD ad DE, una cum eo quod ad quadratum ex DB, eſt ut AD ad DE ſive DB, aequale eſt [3. 2.] rectangulo BAD. quare, per Lem. 10. quadratum ex AC una cum eo quod ad quadratum ex BC, eſt ut AD ad DB, aequale eſt rectangulo BAD una cum eo quod ad quadratum ex DC, eſt ut AB ad DE ſive DB.

Quae ſequuntur Propoſitiones, prima excepta, oſtenduntur ope caſus Lem. 9. Lib. 2. in quo punctum inveniendum requiritur eſſe in recta data ad utraſvis partes producta. quare intelligatur ſequens Corollarium fini iſtius Lemmatis appoſitum eſſe, proprio ſc. ejus loco, quo oblivione excidit.



Cor. Et ſimiliter prorſus inveniri poterit punctum in recta AB producta ad utraſvis partes, ita ut ſegmenta inter ipſum et terminos ipſius AB, ad datam quandam rectam datas habebunt rationes R ad T, et S ad T. Si autem ratio R ad S, hoc eſt, ratio AC ad CB, ſit majoris ad minorem, ſumendum eſt punctum C in AB produc-

ta ad partes B. et contra, ſi ratio ea fuerit minoris ad majorem, ſumendum eſt C in AB producta ad partes A.

Lemma IV.

Si in recta linea ſumatur punctum A, et in eadem data ſint quotcunque puncta B, C, D &c. ſi ſumma ſpatiorum quae ad quadrata ex ſegmentis inter punctum A et data puncta, ſingula ad ſingula, datas habent rationes, data fuerit; dabitur punctum A.



Primò, Sint duo puncta data B, C, ſitque ſpatium M id quod ad quadratum ex AB, et N id quod ad quadratum ex AC datas habent rationes. Dabitur igitur, per Lem. 2. Appendicis, in BC punctum R, ita ut M una cum N aequale ſit dato ſpatio una cum eo quod ad quadratum ex AR datam habet rationem. data autem eſt ſumma ipſorum M, N; quare id quod ad quadratum ex AR datam habet rationem datum eſt; et propterea dabitur quadratum ex AR, et ipſa AR data erit. datum autem eſt punctum R, quare et punctum A.

Secundo, Data ſint tria puncta B, C, D; et ſint M, N, O ſpatia quae ad quadrata ex AB, AC, AD, datas habent rationes. oſtenſum autem fuit, in praecedente, M una cum N aequale eſſe ſpatio dato una cum eo quod ad quadratum ex AR datam habet rationem. ergo M, N, O, ſimul aequalia ſunt ſpatio dato una cum eo quod ad quadratum ex AR datam habet rationem (quod dicatur P) et ſpatio O. Data autem ſunt M, N, O, ex hypotheſi; ergo P ſimul cum O aequale eſt ſpatio dato. habet autem P ad quadratum ex AR datam rationem, et O ad quadratum ex AD datam habet rationem; dabitur igitur [Lem. 2. App.] in recta RD punctum Q, ita ut O et P ſimul aequalia ſint ſpatio dato una cum eo quod ad quadratum ex AQ datam habet rationem. et data oſtenſa ſunt O, P ſimul. ergo id quod ad quadratum ex AQ datam habet rationem, datum eſt, quare dabitur quadratum ex AQ, et ipſa AQ data erit. Datum autem eſt punctum Q, quare et punctum A. et ſimiliter ſi quatuor fuerint puncta data, vel quinque &c. oſtendetur punctum A datum eſſe.

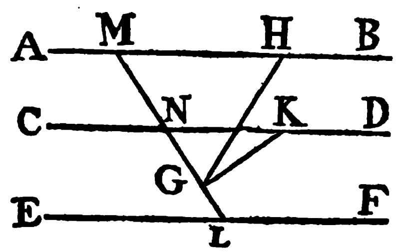
Prop.

Digitized by Google

Prop. I.

Datis quotcunque rectis inter ſe parallelis AB, CD, EF &c. ſi a puncto G ad ipſas in angulis datis ducantur GH, GK, GL &c. fuerintque ſpatia quae ad quadrata ex ductis, ſingula ad ſingula, datas habent rationes, ſimul data; tanget punctum G rectam poſitione datam.

Producatur enim una ex ductis LG, occurratque reliquis parallelis in M, N. igitur, propter triangulum GHM ſpecie datum, dabitur ratio quadrati ex GH ad quadratum ex GM; quare id quod ad quadratum ex GH datam habet rationem, habebit etiam ad quadratum ex GM datam rationem [8. dat.]. ſimiliter id quod ad quadratum ex GK datam habet rationem, habebit etiam rationem datam ad quadratum ex GN.



Data autem ſunt L, N, M, puncta in quavis recta, in angulo dato GLE ducta inter parallelas, per datum quodvis punctum, ut L. Quoniam igitur data ſunt L, N, M, puncta, et ſumma ſpatiorum quae ad quadrata ex ipſis GM, GN, GL, ſingula ad ſingula, datas habent rationes, data eſt; dabitur punctum G, [Lem. 4. App.] et recta LG quae ducta eſt in dato angulo ad poſitione datam EF. ergo tangit G rectam poſitione datam, per Prop. 20. Lib. 1. hujus.

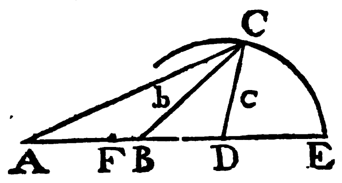
Prop II.

Si a duobus punctis datis A, B, inflectantur ad punctum C rectae AC, BC; fueritque quadratum ex AC majus eo quod ad quadratum ex BC datam habet rationem, dato ſpatio : tanget punctum C circumferentiam poſitione datam.

Caſ. I. Quando ratio data eſt majoris ad minorem.

Digitized by Google

Sit b ſpatium quod ad quadratum ex BC datam habet rationem, et in AB, producta ad partes B, ſit punctum D quod facit rationem AD ad DB, eandem rationi b ad quadratum ex BC.



datum igitur eſt punctum D, dataeque erunt rectae AD, BD. Jungatur DC, et ſit c ſpatium quod ad quadratum ex DC, eſt ut AB ad BD. ergo, per Caſ. ultimum Lem. 10. erit quadratum ex AC una cum c aequale rectangulo DAB una cum b. ex hypotheſi autem, quadratum ex AC aequale eſt ſpatio b una cum dato ſpatio, quod dicatur S; ergo ſpatia b, S, c, ſimul aequalia ſunt rectangulo DAB et ſpatio b; ablatoque communi ſpatio b, erit ſpatium S una cum c aequale rectangulo dato DAB. datumque eſt ſpatium S, quare datum eſt ſpatium c, quod ſc. ad quadratum ex DC, datam habet rationem AB ad BD; ergo datum eſt quadratum ex DC, et ipſa DC magnitudine data erit; datumque eſt punctum D; tangit igitur punctum C circumferentiam poſitione datam, per Prop. 1. Lib. 1. hujus.

Componetur ita.

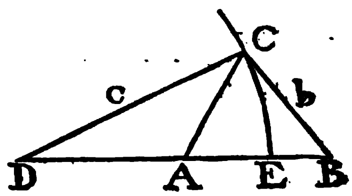
Sit ratio data quam habere debet ſpatium b ad quadratum ex BC, ea quam habet recta P ad rectam Q. et ut P ad Q, ita fiat AD ad DB. ſit autem S ſpatium datum quo ſc. quadratum ex AC excedere debet ipſum b. Debet autem ſpatium S minus eſſe rectangulo DAB, ut ex analyſi conſtat. Sit igitur S aequale rectangulo FAB, quoniam igitur rectangulum FAB una cum contento AB, FD aequale eſt ipſi DAB, erit AB, FD ſpatium quod in analyſi dictum fuit c. et quoniam c, hoc eſt contentum AB, FD, eſt ad rectangulum BDF, ut AB ad BD, erit rectangulum BDF aequale quadrato ex recta invenienda DC. Inter BD igitur et DF inveniatur media proportionalis DE, centroque D, intervallo DE, deſcribatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaeſitus; hoc eſt, ſi ad quodvis in ipſa punctum C inflectantur rectae AC, BC, erit quadratum ex AC majus eo ſpatio b, quod ad quadratum ex BC, eſt ut AD ad DB, ſpatio dato S ſive rectangulo FAB. Jungatur enim DC; et quoniam a vertice trianguli ADC, ducta eſt CB ad baſim, et eſt c ſive rectangulum AB, FD ad quadratum ex DE ſive DC, hoc eſt, ad rectangulum BDF ut AB, ad BD; et b ad quadratum ex BC, ut AD ad DB; erit per

Digitized by Google

per Caſ. ultimum Lem. 10. quadratum ex AC una cum c aequale rectangulo DAB una cum b, hoc eſt, ex conſtructione, ſpatiis S, c una cum b. auferatur commune ſpatium c, et reliquum, quadratum ſc. ex AC, aequale erit ſpatio S una cum ipſo b.

Caſ. II. Quando ratio data eſt minoris ad majorem, reliquis ut in primo manentibus.

Sit D punctum in recta AB producta ad partes A, quod facit rationem AD ad DB, eandem rationi ſpatii b ad quadratum ex BC. et junctâ DC, ſit c ſpatium quod ad quadratum ex DC, eſt ut AB ad BD. ergo per Lem. 3. Appendicis, ſpatia c, b ſimul aequalia ſunt rectangulo DAB, et quadrato ex AC; et, ex hypotheſi, quadratum ex AC aequale eſt ſpatio b et S ſimul. ergo ſpatia c, b ſimul aequalia ſunt rectangulo DAB, et ſpatiis b, S. ablato igitur communi b, erit ſpatium c aequale rectangulo dato DAB, et ſpatio dato S. datum igitur eſt ſpatium c, quare et quadratum ex DC ad quod c datam habet rationem AB ad BD. data igitur eſt DC magnitudine, datumque eſt punctum D; ergo tangit punctum C circumferentiam poſitione datam.



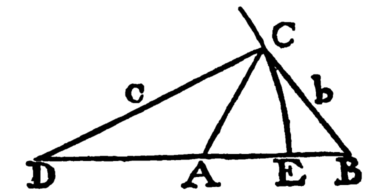
Componetur ita.

Inveniatur in AB producta, ad partes A, quia ratio data eſt minoris ad majorem, punctum D quod facit rationem AD ad DB eandem datae rationi quam habere debet ſpatium b ad quadratum ex BC. et ſit ſpatium c aequale rectangulo DAB et ſpatio S ſimul. ut autem AB ad BD, ita fiat c ad quadratum ex recta DE. centro autem D, intervallo DE, deſcribatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaeſitus. ad quodvis enim in ipſa punctum C, inflectantur AC, BC, et DC jungatur. et per Lem. 3. App. erit c una cum b aequale rectangulo DAB et quadrato ex AC, hoc eſt, ex conſtructione, rectangulum DAB, ſpatium S, et ſpatium b ſimul, aequalia ſunt rectangulo DAB et quadrato ex AC. ergo quadratum ex AC aequale eſt ſpatio S et ſpatio b, hoc eſt, quadratum ex AC majus eſt ſpatio b, dato ſpatio S.

Propoſitio haec eadem eſt cum Prop. 4. Lib. 2. hujus. Quoniam enim quadratum ex AC aequale eſt ſpatio b quod ad quadratum ex BC

da-

datam habet rationem, una cum dato ſpatio S; erit quadratum ex AC, dempto ſpatio S, aequale ipſi b; et propterea quadratum ex AC, dempto ſpatio S, habet ad quadratum ex BC datam rationem, hoc eſt, quadratum ex AC majus eſt quadrato ex BC, dato, quam in ratione; quae eſt hypotheſis Prop. 4. Lib. 2. hujus.

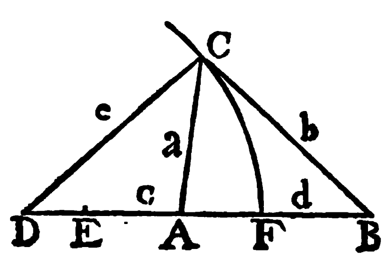


Si autem quadratum ex AC una cum dato ſpatio aequale fuerit ei quod ad quadratum ex BC datam habet rationem, hoc eſt, ſi quadratum ex AC minus fuerit quadrato ex BC, dato, quam in ratione; et viciſſim, ut oſtenſum fuit in Prop. 24. Lib. 1. hujus, erit quadratum ex BC majus quadrato ex AC, dato, quam in ratione, hoc eſt quadratum ex BC aequale erit ei quod ad quadratum ex AC datam habet rationem una cum ſpatio dato; et propterea punctum C tanget circumferentiam poſitione datam per hanc Propoſitionem.

PROP. III.

DATIS duobus punctis A, B, ſi ab ipſis ad punctum C inflectantur duae rectae AC, BC, fueritque id quod ad quadratum ex una ipſarum AC datam habet rationem, aequale ei quod ad quadratum ex altera BC datam habet rationem una cum ſpatio dato S; tanget punctum C circumferentiam poſitione datam.

Sit a illud quod ad quadratum ex AC, datam habet rationem, et b illud quod ad quadratum ex BC datam habet rationem. poterit igitur,



per Lem. 9. inveniri punctum D in recta AB producta, et recta DE, ita ut BD ſit ad DE, ut a ad quadratum ex AC; et AD ſit ad DE, ut b ad quadratum ex BC. Inveniantur, et DC jungatur. ſit autem c id quod ad quadratum ex AD eſt ut BA ad DE, d vero ad quadratum ex AB, ut AD ad DE, et

e ad

e ad quadratum ex DC, ut BA ad DE. ergo, propter datas BA, AD, dabuntur c et d. eſt vero, per Lem. 10. e una cum b aequale ipſis c, d, a, ſimul; et, ex hypotheſi, a aequale eſt ipſi b una cum S; ergo e una cum b aequale eſt ipſis c, d, b, S. auferatur commune ſpatium b, et e aequale erit datis ſpatiis c, d, S ſimul. datum igitur eſt e. Eſt autem e ad quadratum ex DC, in data ratione quam habet AB ad DE; ergo datum eſt quadratum ex DC, ipſaque DC magnitudine data erit; datumque eſt punctum D. ergo tangit C circumferentiam poſitione datam.

Componetur ita,

Sit ratio data quam habere debet a ad quadratum ex AC, eadem rationi quam habet recta M ad ipſam O; quam vero habere debet b ad quadratum ex BC, eadem ſit rationi rectae N ad O. et, ſi ratio M ad N fuerit majoris ad minorem, inveniatur per Lem. 9. in AB producta ad partes ipſius A, punctum D, et recta DE, ita ut BD ſit ad DE, ut M ad O; AD vero ſit ad DE, ut N ad O. ſi autem ratio M ad N fuerit minoris ad majorem, ponatur M pro N, et A loco B, et a pro b, et vice verſa. fiat vero, in utroque caſu, ut AB ad DE, ita ſpatium quoddam c ad quadratum ex AD; et ut AD ad DE, ita ſpatium quoddam d ad quadratum ex AB. ſitque S ſpatium datum quo excedere debet a ipſum b. et ſpatiis c, d, S, aequale fiat ſpatium e; et ut AB ad DE, ita fiat ſpatium e ad quartum, quadratum ſc. ex DF; et, centro D, intervallo DF, deſcribatur circulus; erit hujus circumferentia Locus quaeſitus. hoc eſt, ſi ad quodvis in ea punctum C, ducantur AC, BC, erit a, id ſc. quod ad quadratum ex AC, eſt ut BD ad DE, ſeu ut M ad O, aequale ei b quod ad quadratum ex BC eſt ut AD ad DE, ſeu ut N ad O, una cum ſpatio S. Jungatur enim DC; et quoniam a vertice C trianguli DCB, ducta eſt CA ad baſim, et, ex conſtructione, eſt e ad quadratum ex DF ſeu DC, ut AB ad DE, et b ad quadratum ex BC, ut AD ad DE, et c ad quadratum ex DA, ut AB ad DE, d vero ad quadratum ex AB, ut AD ad DE, et a ad quadratum ex AC, ut DB ad DE; erit, per Lem. 10. e una cum b aequale ipſis c, d, a, ſimul. ex conſtructione autem eſt e aequale ipſis c, d, S, ſimul; ergo b, c, d, S ſimul aequalia ſunt ipſis c, d, a, ſimul. et ablatis ſpatiis c, d; erit ſpatium a aequale ipſis b, S, ſimul.

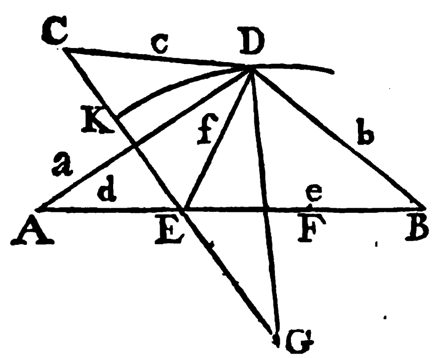
PROP.

Digitized by Google

Prop. IV.

Datis tribus punctis A, B, C, ſi ab ipſis ad punctum D inflectantur AD, BD, CD, fueritque id quod ad quadratum ex AD datam habet rationem, una cum eo quod ad quadratum ex BD datam habet rationem, aequale ei quod ad quadratum ex CD datam habet rationem una cum ſpatio dato S; tanget punctum D circumferentiam poſitione datam.

Sit enim a id quod ad quadratum ex AD, b id quod ad quadratum ex BD, c id quod ad quadratum ex CD, datas habent rationes. et, per Lem. 9. inveniatur in juncta AB, punctum E, ut et recta EF, ita ut a ſit ad quadratum ex AD, ut BE ad EF, b vero ſit ad quadratum ex BD, ut AE ad EF. ſitque d id quod ad quadratum ex AE, eſt ut BE ad EF; e id quod ad quadratum ex BE, eſt ut AE ad EF; et f id quod ad quadratum ex juncta ED, eſt ut AB ad EF. ergo, per Lem. 10. erit a una cum b aequale ipſis d, e, f. eſt autem, ex hypotheſi, a una cum b aequale c una cum S, ergo d, e, f ſimul aequalia ſunt ipſis c, S. et data ſunt ſpatia d, e, S; quare unum ipſorum f, c altero majus eſt ſpatio dato. igitur, per Prop. 3. praecedentem, tangit punctum D circumferentiam poſitione datam.



Componetur ita.

Inveniatur in AB punctum E, et recta EF, ita ut BE ſit ad EF, in data ratione quam habere debet a ad quadratum ex AD, et AE ſit ad EF, in data ratione quam habere debet b ad quadratum ex BD. Sit autem S ſpatium datum quo excedere debent a et b ſimul ipſum c, ſpatium ſc. quod ad quadratum ex CD datam debet habere rationem. et fiat ut BE ad EF, ita ſpatium quoddam d ad quadratum ex AE; et ut

AE

AE ad EF, ita fiat ſpatium quoddam e ad quadratum ex BE. et primo ſint ſpatia d, e, ſimul majora ipſo S, ſitque ipſorum exceſſus ſpatium T. et, per Prop. 3. praecedentem, deſcribatur circulus ad cujus quodvis punctum D, ſi a punctis C, E inflectantur rectae CD, ED, erit ſpatium ſc. c quod ad quadratum ex CD datam habet rationem, aequale ſpatio f quod ad quadratum ex ED datam habet rationem, quam ſc. habet AB ad EF, una cum ipſo T. erit hujus circumferentia Locus quaeſitus; hoc eſt, ſi ducantur AD, BD, erit a id ſc. quod ad quadratum ex AD, eſt ut BE ad EF, una cum b quod ad quadratum ex BD, eſt ut AE ad EF, aequale ſpatio c una cum ipſo S. Quoniam enim, ex conſtructione, eſt d una cum e aequale ipſis S, T, ſimul; erunt d, e, f ſimul aequalia ipſis S, T, f; eſt autem c, ex conſtructione, aequale ipſis f, T, quare d, e, f ſimul aequalia ſunt ipſis S, c. Eſt vero per Lem. 10. a una cum b aequale ipſis d, e, f, hoc eſt, ipſi c una cum S.

Secundo, ſit ſpatium S majus ipſis d, e, ſimul, ſitque ipſorum exceſſus ſpatium V. et, per praecedentem, deſcribatur circulus ad cujus quodvis punctum D, ſi inflectantur ED, CD, erit ſpatium f, quod ſc. ad quadratum ex ED, eſt ut AB ad EF, aequale ipſi c quod ad quadratum ex CD datam habet rationem, una cum ipſo V. Erit hujus circumferentia Locus quaeſitus. Etenim, ex conſtructione, ſpatia d, e, V ſimul aequalia ſunt ipſo S; quare d, e, V, c ſimul aequalia ſunt ipſis c, S. et, itidem ex conſtructione, eſt f aequale ipſis c, V; ergo ſpatia d, e, f, hoc eſt, ſpatia a, b ſimul aequalia ſunt ipſis c, S.

Sed ſi d, e, ſimul aequales fuerint ipſi S, erit et f aequale ipſi c, et quadratum ex ED, quod datam habet rationem ad f ſive c, datam habebit [8. dat.] rationem ad quadratum ex CD. Ergo et recta ED datam habebit rationem ad ipſam CD. Tanget propterea punctum D rectam vel circumferentiam poſitione datam, per Prop. 2. Lib. 2. huj.

FINIS.

Digitized by Google

ERRATA.

P. 6. lin. ult. 32. 6. lege 14. 1. p. 36. lin. 12. ſint, lege ſunt p. 37. lin. 5. parellelae, lege parallelae p. 41. lin. 12. dele, in parte 2da. et dele FP, p. 48. lin. 17. poſt Propoſitionem, addatur, vel praecedentem ſi BC, DE inter ſe fuerint parallelae Ibid. lin. penult. poſt Propoſitionem, addatur, vel praecedentem ſi BC, DE inter ſe fuerint parallelae Ibid. lin. ult. poſt Propoſitionis, addatur, hujus, vel praecedentis p. 50. lin. penult. ipſa, lege ipſo. p. 69. lin. 18, 19, 21, 23. datis, lege totidem p. 72. lin. 26. majus, lege major p. 85. lin. 3. a fine, 3. lege 2. p. 86. lin. 17. 20. 3. lege 2. p. 182. lin. 28. praecedente, lege praecedenti p. 232. lin. 20. poſt quare, addatur, ſi d, e, ſimul non aequales fuerint ipſi S,

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google